

Analyse und Simulation von Leitungsnetzwerken

von
Ludwig Kittel

Erlangen 1970

1971 1284



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Analyse und Simulation von Leitungsnetzwerken

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt

von

Ludwig Kittel

Erlangen 1970



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 21. Juli 1970

Tag der Promotion: 26. November 1970

Dekan: Prof. Dr.rer.nat. H.J. Oel

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler

Prof. Dr.-Ing. H. Brand

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Schüssler, der diese Arbeit betreut hat, danke ich für Kritik, Ermunterung und wertvolle Hinweise. Mein Dank gilt ferner Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Brand für seine Gesprächsbereitschaft und sein Interesse an der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Liste der wichtigsten Formelzeichen	9
1. Einleitung	15
2. Das Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke	17
2.1 Allgemeines	17
2.2 Definition der Netzwerkelemente	18
2.2.1 Die Elementarleitung	18
2.2.2 Widerstände	22
2.2.3 Quellen	23
2.3 Strukturaufbau	26
2.3.1 Allgemeine Netzwerkstruktur	26
2.3.2 Streumatrixbestimmung von Stoßstellen	30
2.3.3 Modifizierte Netzwerkstruktur	43
3. Beschreibung des Grundmodells	46
3.1 Beschreibung durch Signalflußgraphen	46
3.1.1 Definition des linearen Signalflußgraphen	46
3.1.2 Darstellung von Reflexionsvorgängen durch Signalflußgraphen	48
3.1.3 Beziehung zwischen Netzwerkstruktur und Signalflußgraph	50
3.1.4 Ermittlung eines Vektorflußdiagrammes	51
3.2 Beschreibung durch Zustandsgleichungen	59
3.2.1 Zustandskonzept bei linearen diskreten Systemen	59
3.2.2 Wellen als Zustandsvariable	64
3.2.3 Ermittlung der Zustandsgleichungen	67
3.2.4 Modifikation der Zustandsgleichungen	76

	Seite
4. Anwendungsbeispiele	81
4.1 Allgemeines	81
4.2 Schaltungen zur Impulsanpassung	83
4.3 Impulsverkürzende Schaltungen	88
4.3.1 Herleitung der Übertragungsfunktion	88
4.3.2 Theoretische Untersuchung der Kaskadenschaltung	96
5. Erweiterung des Grundmodells durch Einfügung weiterer Netzwerkelemente	109
5.1 Allgemeines	109
5.2 Mehrfachleitungen	110
5.2.1 Definition der Mehrfachleitung	110
5.2.2 Darstellung der Mehrfachleitung durch ein Bündel äquivalenter Elementarleitungen	116
5.2.3 Streumatrixbestimmung bei der Beteiligung von Mehrfachleitungen	117
5.2.4 Auswirkungen auf die Beschreibung durch Zustandsgleichungen	123
5.3 Induktivitäten und Kapazitäten	123
5.3.1 Darstellung von Induktivitäten und Kapazitäten durch kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Elementarleitungen	123
5.3.2 Bedeutung der Ersatzschaltungen für das Zeitverhalten	124
5.4 Homogene Leitungsstücke	126
5.4.1 Vorbemerkungen	126
5.4.2 Auswirkungen der veränderten Struktur-auffassung	127
6. Untersuchung des Zeitverhaltens mit dem Digital-rechner	130
6.1 Allgemeines	130
6.2 Wichtige Prinzipien bisheriger Verfahren	130
6.2.1 Der Impulsfahrplan von Bewley	130
6.2.2 Die Methode von Bergeron	134
6.2.3 Die Faltung mit der Impulsantwort	137

	Seite
6.3 Entwicklung eines Analyseprogramms	138
6.3.1 Das verwendete mathematische Verfahren	138
6.3.2 Automatischer Matrixaufbau	140
6.3.2.1 Vorbemerkungen	140
6.3.2.2 Aufbereitung des Netzwerks	141
6.3.2.3 Kennzeichnung der Leitungen und Stoßstellen	142
6.3.2.4 Topologische Beschreibung der Netzwerkstruktur	143
6.3.2.5 Erläuterndes Beispiel	144
6.3.3 Festlegung der Ein- und Ausgangsgrößen	148
6.4 Beispiele	150
6.4.1 Einschwingvorgang bei dem begleitenden Schaltbeispiel	150
6.4.2 Impulsverkürzung mit einer fünfstufigen Leitungskaskade	151
6.4.3 Einschwingverhalten von Mehrelemente- kopplern	152
6.4.4 Aufladung eines Kondensators über eine Zusammenschaltung aus Widerstand, Leitung und Spule	160
7. Simulation von Leitungsnetzwerken auf dem Analogrechner	163
7.1 Die Methode der direkten Simulation	163
7.2 Die Simulation der Zeitverzögerung	165
7.3 Die Simulation der Stoßstellen	167
7.3.1 Das verwendete Prinzip der Schaltungsentwicklung	167
7.3.2 Koppelpläne für verschiedene Stoßstellen- typen	169
7.4 Die Darstellung kontinuierlicher Zeitverläufe durch ein erweitertes Simulationssystem	187
7.4.1 Vergleich zwischen gewünschtem und bisher entwickelten Simulationssystem	187
7.4.2 Betrachtung rationaler Übertragungs- funktionen	189
7.4.3 Ergänzung durch weitere Zusatzsysteme	192
7.4.4 Verallgemeinerung und abschließende Bemerkungen	197

	Seite
7.5 Beispiele	199
7.5.1 Überblick	199
7.5.1.1 Das verwendete Abtasthalteglied	199
7.5.1.2 Die untersuchte Schaltgruppe	201
7.5.1.3 Die simulierten Eingangssignale	203
7.5.2 Schaltung zur Impulsanpassung	210
7.5.3 Schaltung zur Impulsverkürzung	212
8. Entwicklung eines automatischen Verfahrens zur Analyse von Signalflußgraphen	221
8.1 Allgemeines	221
8.2 Der Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus	226
8.2.1 Darstellung und topologische Deutung des Verfahrens	226
8.2.2 Behandlung eines Beispiels	230
8.3 Codierung und Programmierung	235
8.3.1 Vorbemerkung	235
8.3.2 Codierung	235
8.3.3 Programmierung	240
8.4 Anwendung auf Leitungsnetzwerke zur Bestimmung der Übertragungsfunktion	244
9. Zusammenfassung	251
Literaturverzeichnis	253

Liste der wichtigsten Formelzeichen

a	ganzzahliger Faktor
a_m	Koeffizient
$A_{m,n}(s)$	Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems
$\underline{A}$	Systemmatrix
b	ganzzahliger Faktor
b_m	Koeffizient
$B_{*m;n}(\zeta)$	Übertragungsfunktion eines rekursiven Digitalen Filters
$\underline{B}$	Eingangsmatrix
c	ganzzahliger Faktor
c_m	Koeffizient
$c(\lambda)$	Polynom
$C_*(\zeta)$	Übertragungsfunktion eines nichtrekursiven Digitalen Filters
C'	Kapazitätsbelag
$\underline{C}'$	Matrix der Maxwell'schen Teilkapazitäten
$\underline{C}$	Ausgangsmatrix
d	ganzzahliger Faktor
d_k, d_m	Koeffizienten
$D(s), D_*(z)$	Übertragungsfunktion des Simulationssystems für ein Leitungsnetzwerk
$\underline{D}$	Einflußmatrix
e	Eulersche Zahl
$e(t)$	Zeitfunktion
$E(s), E_*(z)$	Transformierte der Funktion $e(t)$
$\underline{E}$	Einheitsmatrix
f	Frequenz
f_o	Referenzfrequenz
$f(t)$	allg. Zeitfunktion
$F(s), F_*(z)$	Transformierte der Funktion $f(t)$
$\underline{F}$	Übertragungsmatrix
g	Amplitudenfaktor
$g(t)$	Zeitfunktion
G_E	Eingangsleitwert
$\underline{G}$	Leitwertmatrix, Verknüpfungsmatrix

$G(s)$	Laplace-Transformierte der Funktion $g(t)$
h_d	Amplitudenfaktor
h_k	Koeffizient
$h(t)$	Impulsantwort
$H(s), H_*(z)$	Übertragungsfunktion
$\underline{H}(s), \underline{H}_*(z)$	Übertragungsmatrix
$i(t)$	Strom allg. (Zeitbereich)
$\underline{i}(t)$	Vektor der Ströme (Zeitbereich)
$I(s)$	Strom allg. (Bildbereich)
I_o	Quellstrom
$\underline{I}(s)$	Vektor der Ströme (Bildbereich)
j	imaginäre Einheit
k	Anzahl der Wellenleiter einer Verzweigung
$\underline{K}$	Kommutierungsmatrix
$\underline{K}'$	Matrix der elektrischen Induktivitäten
l	Länge
L	Anzahl der Elementarleitungen einer Kaskade
L'	Induktivitätsbelag
$\underline{L}'$	Matrix der magnetischen Induktivitäten
m	Toranzahl des vollständig erweiterten Mehr- tors, Zählergrad
m'	Anzahl aller Elementarleitungen des modifizierten Leitungsnetzwerks
M	Anzahl der Wellen des modifizierten Leitungsnetzwerks
$\underline{M}$	Modalmatrix
n	Anzahl der Ersatzleitungen im Ersatzschalt- bild einer Verzweigung, Nennergrad
n'	Anzahl der ursprünglichen Elementarleitungen eines Leitungsnetzwerks
N	Anzahl der Wellen auf den ursprünglichen Elementarleitungen eines Leitungsnetzwerks
p	Anzahl der passiven Elemente einer Stoßstelle
p'	Anzahl der Ersatzleitungen für Widerstände im modifizierten Leitungsnetzwerk
p_i	Koeffizient
$p(t)$	Zeitfunktion

P	Anzahl der Wellen auf den Ersatzleitungen für Widerstände
$P(s), P_*(z)$	Transformierte der Funktion $p(t)$
P_μ	Wert eines Pfades
q	Anzahl der Quellen einer Stoßstelle
q'	Anzahl der Quellen eines Leitungsnetzwerks
$q(t)$	Treppenfunktion
Q	Anzahl der Wellen auf den Ersatzleitungen für Quellen
$Q(s), Q_*(z)$	Transformierte der Funktion $q(t)$
r	Reflexionsfaktor
$r(t)$	Treppenfunktion
R	Widerstand allg.
R_o, R_q	Innenwiderstand einer Quelle
R_E	Eingangswiderstand
$R(s), R_*(z)$	Transformierte der Funktion $r(t)$
$\underline{R}_o$	Referenzmatrix
$s = \sigma + j\omega$	komplexe Frequenzvariable
s'	komplexe Variable, Anzahl der Stoßstellen eines Leitungsnetzwerks
$s_{o\mu}$	μ -te Nullstelle
$s_{p\nu}$	ν -te Polstelle
$S_\nu^{(1)}, S_{\nu\mu}^{(1)}$	Werte von Schleifen
$\underline{S}$	Streuematrix allg.
$\underline{\underline{S}}$	Streuematrix eines erweiterten Mehrtors
$\underline{\underline{S}}_{ges}$	Streuematrix eines vollständig erweiterten Mehrtors
$\underline{S}_q$	Quell-Spaltenvektor
$\underline{S}_v$	Verbraucher-Zeilenvektor
t	Zeit allgemein
$t_1, \dots$	bestimmte Zeitwerte
T	Verzögerungszeit der Elementarleitung
T_{AUS}	Ausgangsimpulsdauer
T_{EIN}	Eingangsimpulsdauer
T_G	Verzögerungszeit bei der Impulsverkürzung
$\underline{T}(\lambda)$	Teil einer Übertragungsmatrix $\underline{F}(\lambda)$

$u(t)$	Spannung allg. (Zeitbereich)
$\underline{u}(t)$	Vektor der Spannungen (Zeitbereich)
$U(s), U_*(z)$	Spannung allg. (Bildbereich bzw. z-Bereich)
U_o	Quellspannung
U_q	Spannungsquellwelle
$\underline{U}(s), \underline{U}_*(z)$	Vektor der Spannungen (Bildbereich bzw. z-Bereich)
v	Ausbreitungsgeschwindigkeit
$v(t)$	abhängige Variable (Zeitbereich)
$v'(t)$	unabhängige Variable (Zeitbereich)
$\underline{v}(t), \underline{v}'(t)$	abhängiger und unabhängiger Variablenvektor (Zeitbereich)
$V(s), V_*(z)$	Transformierte der abhängigen Variablen
$V'(s), V'_*(z)$	Transformierte der unabhängigen Variablen
$\underline{V}(s), \underline{V}_*(z)$	transformierter abhängiger Variablenvektor
$\underline{V}'(s), \underline{V}'_*(z)$	transformierter unabhängiger Variablenvektor
$\underline{V}, \underline{V}, \underline{V}', \underline{V}'$	abhängige und unabhängige Variable bzw. Vektoren eines allg. Signalflußgraphen bzw. eines allg. Vektorflußdiagramms
w	Anzahl der Leiter einer Mehrfachleitung, Wellenwiderstandsverhältnis
$w(t)$	Treppenfunktion
$\underline{W}$	Wellenwiderstandsmatrix einer Mehrfachleitung
$x(t)$	Zustandsvariable
$\tilde{x}(t)$	Hilfsgröße
$\underline{x}(t)$	Zustandsvektor
$\tilde{\underline{x}}(t)$	Hilfsvektor
$X(s), X_*(z)$	transformierte Zustandsvariable
$\underline{X}(s), \underline{X}_*(z)$	transformierter Zustandsvektor
$\tilde{X}(s), \tilde{X}_*(z)$	transformierte Hilfsgröße
$\tilde{\underline{X}}(s), \tilde{\underline{X}}_*(z)$	transformierter Hilfsvektor
$y(t)$	Ausgangsvariable
$\underline{y}(t)$	Ausgangsvektor
$Y(s), Y_*(z)$	transf. Ausgangsvariable
$\underline{Y}(s), \underline{Y}_*(z)$	transf. Ausgangsvektor
z	komplexe Variable
Z	Wellenwiderstand allg.
Z_o, Z_q	Wellenwiderstand einer Wellenquelle

Z_{oc}	Gleichtaktwellenwiderstand
Z_{od}	Gegentaktwellenwiderstand
Z	Diagonalmatrix der Wellenwiderstände
α	ganzzahliger Faktor
β	Phasenkonstante
γ	ganzzahliger Faktor
$\Gamma_*(\xi)$	diskreter Anteil der Übertragungsfunktion $E(s)$
$\delta_0(t)$	Diracimpuls
$\delta_1(t)$	Sprungfunktion
$\Delta_*(\xi)$	Übertragungsfunktion des diskreten Zusatzsystems
ϵ	Dielektrizitätskonstante
ξ	komplexe Variable
η	Verkürzungsfaktor
Θ	elektrische Länge
λ	Wellenlänge, Parameter
$\underline{A}$	verallg. Streumatrix für die Gesamtheit aller ursprünglichen Elementarleitungen
μ	Permeabilitätskonstante
ξ	komplexe Variable
ϱ	reziproke Verkürzung
$\underline{\Sigma}$	verallg. Streumatrix für die Gesamtheit aller Stoßstellen
τ	Zeitinkrement
$\underline{\phi}$	Übergangsmatrix
ω	Kreisfrequenz

Hinweise und Indizes:

A	Anfang einer Leitung
E	Ende einer Leitung, Eingang eines Netzwerks
F	Funktion $F(s)$
ges	gesamt
h	hinlaufend
I	Induktivität
K	Kapazität
L	Leitung (hochgestellt), Last (tiefgestellt)
m	angrenzende Elementarleitungen einer erweiterten Stoßstelle
M	Elementarleitungen des ursprünglichen Netzwerks
n	ursprüngliche angrenzende Elementarleitungen einer Stoßstelle
N	ursprüngliche Elementarleitungen im Netzwerk
p	passive Elemente in einer Stoßstelle
P	passive Elemente im Netzwerk, parallel
q	Quellen in einer Stoßstelle
Q	Quellen im Netzwerk
r	rücklaufend
S	Stoßstelle (hochgestellt), Serie (tiefgestellt), Schalter
v	Verbraucher
*	Abtastung
i, j, k, l, m, n, 1, 2, ...	} Laufzahlen
$\alpha, \nu, \mu, I, II, \dots$	

1. Einleitung

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren zur Analyse und Simulation von Leitungsnetzwerken beruhen auf der engen mathematischen Verwandtschaft zwischen Abtastsystemen bzw. Digitalen Filtern einerseits und dispersionsfreien Leitungsnetzwerken aus idealen Leitungen kommensurabler Länge andererseits.

Die bestehende Verwandtschaft ist wohl zuerst von P.M. Lewis (3/12) erkannt worden, der auf der Suche nach schnellen Abtastsystemen auf Leitungsnetzwerke aus kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Leitungsstücken gestoßen ist. Die mathematischen Hilfsmittel zur Beschreibung der Vorgänge in Abtastsystemen, z.B. die z-Transformation, sind in der einschlägigen Literatur über Leitungsnetzwerke bisher nur in geringem Umfang zu finden, z.B. (3/7), (4/16). Eine Beschreibung von Wanderwellenvorgängen durch Differenzengleichungen findet sich zwar bereits bei K.W. Wagner (5/2); die von ihm verwendete Methode ist aber anscheinend in Vergessenheit geraten. Auf die enge Verwandtschaft zwischen Digitalen Filtern und Leitungsnetzwerken ist in allerjüngster Zeit von A. Fettweis (1/1) hingewiesen worden. Er macht den Vorschlag, Digitale Filter in Anlehnung an die Struktur von TEM-Leitungsfiltren zu realisieren.

In der vorliegenden Arbeit, die sich vorwiegend mit der Untersuchung des Zeitverhaltens von Leitungsnetzwerken beschäftigt, wird zunächst gezeigt, daß sich die betrachteten Leitungsnetzwerke durch die Zustandsgleichungen linearer diskreter Systeme beschreiben lassen. Die hergeleiteten Beziehungen bilden dann den Ausgangspunkt für die Entwicklung eines mathematischen Verfahrens zur Bestimmung des Zeitverhaltens von Leitungsnetzwerken mit dem Digitalrechner. Das benutzte mathematische Modell besteht aus einem System gekoppelter Differenzengleichungen, deren Koeffizienten von den Elementen der Streumatrizen der

Stoßstellen gebildet werden. Durch die näherungsweise Darstellung von Induktivitäten und Kapazitäten als kurzgeschlossene bzw. leerlaufende (Elementar-) Leitungen und die mögliche Unterteilung von homogenen Leitungsstücken in Vielfache einer kleinsten gemeinsamen Grundlänge lassen sich auch allgemeinere Leitungsnetzwerke behandeln, die primär außer Leitungsstücken auch die konzentrierten Elemente R, L und C enthalten.

Während sich bei der digitalen Simulation die genannte Verwandtschaft in der Beschreibung durch Differenzengleichungen äußert, zeigt sie sich bei der analogen Simulation in der Verwendung des Abtasthalteglieders als zeitverzögerndes Element. Da mit Abtasthaltegliedern lediglich Treppenfunktionen verzögert werden können, muß für die exakte Simulation von kontinuierlichen Zeitverläufen eine geeignete Interpolation der Ausgangsfunktion durch nachgeschaltete Zusatzsysteme durchgeführt werden. Diese Teilaufgabe ist auch in der Theorie der Abtastsysteme von Interesse.

Zum Abschluß der Arbeit wird ein Matrizen-Verfahren zur Gewinnung von Übertragungsfunktionen aus der automatischen Analyse von Signalflußgraphen behandelt. Die zu Grunde liegende Matrix ist die Verknüpfungsmatrix des Graphen, die formal als Systemmatrix einer Zustandsgleichung aufgefaßt werden kann.

Die vorgeschlagenen Verfahren werden jeweils ausführlich durch Beispiele erläutert.

2. Das Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke

2.1 Allgemeines

Um das elektrische Verhalten eines physikalischen Netzwerkes theoretisch bestimmen und simulieren zu können, werden seine einzelnen Bauteile durch idealisierte Eigenschaften gekennzeichnet, die zu der mathematischen Definition der Elemente eines abstrakten Netzwerkmodelles führen. Bei der Interpretation und Anwendung der aus der Untersuchung des abstrakten Netzwerkmodelles gefundenen Ergebnisse auf reale Netzwerke muß dann stets die Zulässigkeit der Idealisierung beachtet werden.

Das in dieser Arbeit benutzte Grundmodell für die zu untersuchenden Leitungsnetzwerke läßt als Bauteile zunächst nur unverkoppelte Leitungen, Widerstände und Quellen zu. Es wird später derart erweitert, daß auch verkoppelte Leitungen und Reaktanzen berücksichtigt werden können.

Die verwendeten Netzwerkelemente des Grundmodells setzen folgende idealisierte Eigenschaften voraus:

1. Alle felderfüllten Medien sind linear und zeitinvariant.
2. Die Leitungen sind verlustfreie, geschlossene Doppelleitungen von gestreckt homogener Beschaffenheit mit isotropen Medien.
3. Es sollen nur transversal-elektromagnetische Wellen erregt werden (TEM-Wellen).
4. Die Laufzeiten auf den Leitungen sind ganzzahlige Vielfache einer Grundlaufzeit; d.h. die Leitungslängen sind kommensurabel.
5. Widerstände und Verbindungen sind konzentriert, linear, zeitinvariant und nicht reaktiv.
6. Die Erregung der Netzwerke geschieht durch konzentrierte, lineare, reelle Zweipolquellen.

Wegen der Transversalität der Felder können die betrachteten Netzwerke durch Strom und Spannung beschrieben werden. Den physikalischen Vorgängen besonders angemessen ist eine wellenmäßige Betrachtung: das gesamte elektrische Verhalten des Leitungsnetzwerkes läßt sich aus dem Wechselspiel von Brechung und Reflexion der Wellen auf den einzelnen Leitungen ermitteln. Von den verschiedenen Wellenarten (Spannungswellen, Stromwellen, Leistungswellen) werden hier als Systemgrößen primär die Spannungswellen benutzt, aus denen sich die anderen Arten gegebenenfalls bestimmen lassen.

2.2 Definition der Netzwerkelemente

2.2.1 Die Elementarleitung

Die Elementarleitung ist das Leitungs-Grundelement des Netzwerks. Sie wird dargestellt durch eine dispersions- und verlustfreie Doppelleitung mit dem Wellenwiderstand Z und der Verzögerungszeit T für eine in einer Richtung durchlaufende Welle. Sie wird im s -Bereich ($s = \sigma + j\omega$) mit der in Bild 2/1 gezeigten Bepfeilung durch die folgende Vierpolkettenform der Leitungsgleichungen beschrieben:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh sT & -Z \sinh sT \\ \frac{1}{Z} \sinh sT & -\cosh sT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2/2.1)$$

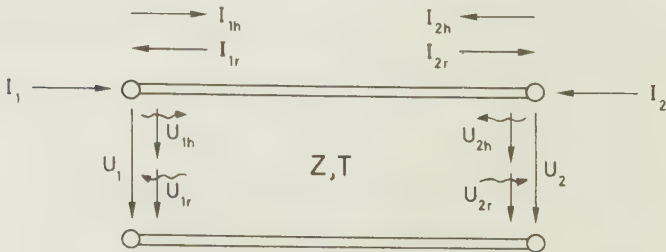


Bild 2/1: Bepfeilung der Elementarleitung

Die Laufzeit T ist allen Elementarleitungen gemeinsam. Die veränderliche Größe ist der Wellenwiderstand Z .

Zur Einführung in die wellenmäßige Betrachtung wird im folgenden gezeigt, wie sich die Vierpolkettenform der Leitungsgleichungen durch Superposition der Strom- und Spannungswellen herleiten läßt.

Wie Bild 2/1 angibt, sind die von den Toren in die Leitung hinlaufenden Wellen mit dem Index h , die aus der Leitung auf die Tore rücklaufenden Wellen mit dem Index r versehen. Die Laufrichtung der Stromwellen stimmt mit der Richtung der Zählpfeile für die Teilströme überein; zur Kennzeichnung der Laufrichtung für die Spannungswellen dienen die geschlängelten Laufpfeile, die senkrecht auf den zugehörigen Zählpfeilen stehen. Die Spannungen und Ströme an einem Ort der Leitung (z.B. an den beiden Toren) erhält man aus den entsprechenden Wellen gemäß

$$\begin{aligned} U &= U_h + U_r, \\ I &= I_h - I_r. \end{aligned} \quad (2/2.2)$$

Die an einem Ort in gemeinsamer Richtung laufenden Strom- und Spannungswellen sind miteinander über den Wellenwiderstand Z der Leitung verknüpft:

$$\frac{U_h}{I_h} = \frac{U_r}{I_r} = Z. \quad (2/2.3)$$

Strom- und Spannungswellen verkörpern gleichermaßen die übermittelte Signalfunktion. Für viele Betrachtungen werden wir uns deshalb auf das Verhalten nur einer Welle, nämlich auf das Verhalten der Spannungswelle beschränken.

Die Gl.(2/2.2) und (2/2.3) liefern für die Spannungswellen

$$\begin{aligned} U_h &= (U + ZI)/2, \\ U_r &= (U - ZI)/2. \end{aligned} \quad (2/2.4)$$

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für die Stromwellen.

Die rücklaufende Welle an einem Tor ist die um die Laufzeit T auf der Leitung verzögerte hinlaufende Welle am anderen Tor. Für die Zeitfunktionen der Spannungswellen gilt

$$\begin{aligned} u_{1r}(t) &= u_{2h}(t-T), \\ u_{2r}(t) &= u_{1h}(t-T). \end{aligned} \quad (2/2.5)$$

Nach dem Verschiebungssatz der Laplace-Transformation äußert sich die zeitliche Verschiebung einer Originalfunktion $f(t)$ um die Zeit T in der Multiplikation der zugehörigen Bildfunktion $F(s)$ mit dem Faktor e^{-sT} :

$$\begin{aligned} F(s) &\longleftrightarrow f(t), \\ e^{-sT} F(s) &\longleftrightarrow \begin{cases} f(t-T) & \text{für } t > T > 0 \\ 0 & \text{für } t < T \end{cases}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Streumatrixdarstellung für die Spannungswellen der Elementarleitung:

$$\begin{bmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-sT} \\ e^{-sT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1h} \\ U_{2h} \end{bmatrix}. \quad (2/2.6)$$

Die Streumatrizen für die Strom- und Spannungswellen sind identisch.

Die in Gl.(2/2.1) angegebene Vierpolkettenform ergibt sich nun mit den Gl.(2/2.2), (2/2.4) und (2/2.6) wie folgt:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{1h} + U_{1r} = U_{2r} e^{sT} + U_{2h} e^{-sT}, \\ &= (U_2 - ZI_2) e^{sT/2} + (U_2 + ZI_2) e^{-sT/2}, \\ &= U_2 \cosh sT - ZI_2 \sinh sT; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{1h} - I_{1r} = I_{2r} e^{sT} - I_{2h} e^{-sT} , \\
 &= (U_2/Z - I_2) e^{sT}/2 - (U_2/Z + I_2) e^{-sT}/2 , \\
 &= U_2/Z \sinh sT - I_2 \cosh sT .
 \end{aligned}$$

Die Elementarleitung ist als Netzwerkelement durch die Definitionsgleichung (2/2.1) vollständig bestimmt. Die weiteren Gleichungen erläuterten den Zusammenhang zwischen der Strom-Spannungs-Darstellung und der Wellendarstellung. Ergänzend soll noch auf einige physikalische Beziehungen hingewiesen werden.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v von TEM-Wellen in verlustlosen, homogenen Leitungen hängt nur von den Materialkonstanten ϵ und μ des Mediums ab, es gilt

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} . \quad (2/2.7)$$

Die Laufzeit T der Wellen auf einer Leitung der Länge l ist also

$$T = l/v = l\sqrt{\epsilon\mu} . \quad (2/2.8)$$

Unter der elektrischen Länge Θ einer Leitung versteht man den imaginären Anteil der komplexen Variablen $sT = \sigma T + j\omega T$; der Zusammenhang mit der Phasenkonstanten $\beta = \omega/v$ ist

$$\Theta = \omega T = \beta l . \quad (2/2.9)$$

Eine spezielle Anwendung der Elementarleitung ist die $\lambda/4$ -Leitung der Hochfrequenztechnik: die Leitungslänge l ist gerade gleich einem Viertel der Wellenlänge $\lambda_0 = v/f_0$ einer Welle, mit der die Leitung im Normfall betrieben wird. Mit der zugehörigen Referenzfrequenz $f_0 = 1/(4T)$ ergibt sich für die elektrische Länge $\omega T = 2\pi f T = \pi f/(2f_0)$.

Über die Ausbreitungsgeschwindigkeit v sind der Induktivitätsbelag L' und der Kapazitätsbelag C' einer Leitung miteinander verknüpft; zwei der genannten Größen bestimmen jeweils den Wellenwiderstand Z . Es gilt

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = vL' = \frac{1}{vC'} \quad . \quad (2/2.10)$$

2.2.2 Widerstände

Die zugelassenen Widerstände sind linear, reell, konzentriert und zeitinvariant. Für eine wellenmäßige Betrachtung ist von Interesse, daß ein Widerstand R nach außen hin wie eine beliebig lange, mit dem Wellenwiderstand $Z=R$ abgeschlossene Leitung wirkt: Widerstände sind durch geeignet abgeschlossene Leitungen darstellbar und umgekehrt; Verbindungen zwischen Leitungen und Widerständen lassen sich als reine Leitungsverbindungen auffassen. Bild 2/2 zeigt die Äquivalenz zwischen der mit dem Wellenwiderstand $Z=R$ abgeschlossenen Leitung und dem Widerstand R ; zweckmäßige Längen der Anschlußleitung sind ganzzahlige Vielfache der Elementarleitungslänge oder eine differentiell kleine Länge.

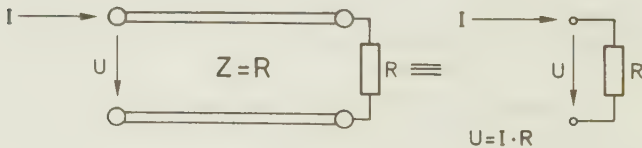


Bild 2/2: Zur Äquivalenz zwischen geeignet abgeschlossener Doppelleitung und Widerstand

2.2.3 Quellen

Die Erregung der betrachteten Netzwerke geschieht durch konzentrierte, lineare, reelle Zweipolquellen, die zweckmäßig durch ihre Ersatzschaltungen gekennzeichnet werden. Gebräuchlich sind die Ersatzspannungsquelle (H. Helmholtz) und die Ersatzstromquelle (H.F. Mayer). Mit der Bepfeilung nach Bild 2/3 lautet der Zusammenhang zwischen der Klemmenspannung U und dem Klemmenstrom I einer solchen Quelle

$$U = U_0 - IR_q, \quad (2/2.11)$$

$$\text{bzw. } I = I_0 - U/R_q. \quad (2/2.12)$$

Die Konstanten in Gl.(2/2.11) und Gl.(2/2.12) sind die Leerlaufspannung U_0 und der Innenwiderstand R_q der Ersatzspannungsquelle bzw. der Kurzschlußstrom I_0 und der Innenwiderstand R_q der Ersatzstromquelle.

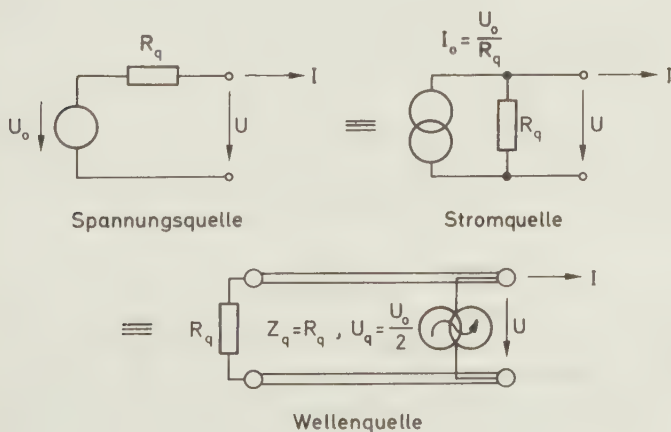


Bild 2/3: Äquivalente Ersatzschaltungen einer linearen Zweipolquelle

Einer wellenmäßigen Betrachtung besonders angemessen ist die von Butterweck (2/1) und Klein (2/2) behandelte (Ersatz-) Wellenquelle.

Nach Klein verstehen wir unter einer Wellenquelle "eine Leitung, die vorn mit ihrem Wellenwiderstand Z abgeschlossen ist und aus der an ihren Klemmen eine eingeprägte Spannungswelle der Größe $a=u_o/2$ (Verf.: halbe Leerlaufspannung) heraustritt." Bild 2/3 zeigt die drei einander gleichwertigen Ersatzschaltungen (mit einem hier eingeführten Symbol für eine eingeprägte Spannungswelle). Die eingeprägte Spannungswelle (Quellwelle) läuft aus dem Quellinneren auf die Klemmen zu und hat unmittelbar vor Erreichen der Klemmen die Größe $U_q=U_o/2$. Der Wellenwiderstand der mit R_q abgeschlossenen Quell-Leitung ist $Z_q=R_q$; ihre Länge ist beliebig, zweckmäßige Werte sind Vielfache der Elementarleitungslänge oder eine differentiell kleine Länge.

Die Klemmenspannung U der Wellenquelle läßt sich anschaulich aus der Reflexion der eingeprägten Welle $U_q=U_o/2$ an einem an die Wellenquelle angeschlossenen Widerstand R_L deuten. Mit dem Reflexionsfaktor r_q der Spannungswellen

$$r_q = \frac{R_L - R_q}{R_L + R_q} \quad (2/2.13)$$

ergibt sich die Klemmenspannung U zu

$$U = (1+r_q) \frac{U_o}{2} = \frac{R_L}{R_L + R_q} U_o \quad (2/2.14)$$

Bild 2/4 zeigt zwei äquivalente Schaltungen zur Bestimmung der Klemmenspannung U , nämlich die mit dem Widerstand R_L abgeschlossene Ersatzspannungsquelle und die mit dem wellenmäßigen Ersatzbild des Widerstandes R_L abgeschlossene Wellenquelle. In der wellenmäßigen Beschreibung ist die Klemmenspannung U die in die Anschlußleitung (Wellenwiderstand $Z_L=R_L$) übertretende Spannungswelle, wenn die Anschlußleitung ausgangsseitig angepaßt ist.

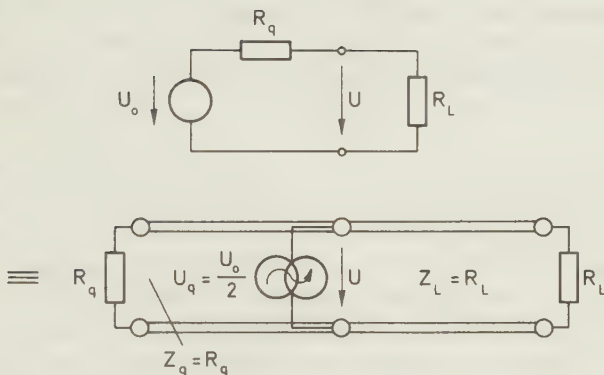


Bild 2/4: Zwei äquivalente Schaltungen zur Bestimmung der Klemmenspannung U

Bei der Ersatzwellenquelle nach Butterweck, der wir uns noch kurz zuwenden wollen, wird als kennzeichnende Wellengröße⁺ nicht die eingeprägte Quellwelle $U_q = U_0/2$ angesehen, sondern die durch Gl.(2/2.14) beschriebene und soeben diskutierte übertretende Welle in die Anschlußleitung, deren Wellenwiderstand $Z_L = R_L$ als Normierungswiderstand aufgefaßt wird. Das zweite Bestimmungsstück der Ersatzwellenquelle ist ihr innerer Reflexionsfaktor $r_1 = -r_q$; s.Gl.(2/2.13).

Um eine Äquivalenz zwischen Strom- bzw. Spannungsquelle einerseits und der Ersatzwellenquelle andererseits herzustellen, darf die Ersatzwellenquelle nur von den unabhängig vom Anschlußnetzwerk definierten Eigenschaften der Zweipolquelle abhängen. Eine Äquivalenz ist dann gegeben, wenn der Innenwiderstand R_q der Zweipolquelle als Normierungswiderstand

⁺Die Betrachtungen von Butterweck beziehen sich auf normierte Leistungswellen; die Ergebnisse werden hier sinngemäß auf Spannungswellen übertragen.

gewählt wird. Die Ersatzwellenquelle nach Butterweck zeigt nun das gleiche Verhalten wie die Wellenquelle nach Klein: die kennzeichnende Welle nach Gl.(2/2.14) ist gleich der Quellwelle $U_q = U_o/2$, der Reflexionsfaktor $r_i = -r_q$ nimmt nach Gl.(2/2.13) den Wert Null an.

Die Anwendung der Äquivalenzbeziehung zwischen den verschiedenen Ersatzquellen ist z.B. dann von Vorteil, wenn Wellenverhältnisse an einer Verbindungsstelle zwischen Leitungen untereinander bzw. mit konzentrierten Elementen bestimmt werden sollen. Da die erregenden Leitungen einer solchen Stoßstelle als Wellenquellen aufgefaßt und durch konzentrierte Quellen dargestellt werden können, und sich angepaßt zu denkende Leitungen durch Widerstände ersetzen lassen, gehen so die gesuchten Wellenverhältnisse über in Spannungsverhältnisse bei konzentrierten Schaltungen (s.Abschnitt 2.3.2).

2.3 Strukturaufbau

2.3.1 Allgemeine Netzwerkstruktur

Eine in der Mikrowellentechnik zweckmäßige Gliederung von physikalischen Mikrowellennetzwerken unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Raumbereichsarten, nämlich zwischen den homogenen Wellenleitern als Raumbereiche 1. Art und den sogenannten Verzweigungen (das sind alle sonstigen leitungsähnlichen Bauteile wie inhomogene Leitungen, Hohlraumresonatoren, Richtkoppler usw.) als Raumbereiche 2. Art (2/3). Die Raumbereiche 1. Art dienen als Definitionsräume von skalaren Wellengrößen, deren Verhältnisse an einer Verzweigung Operatorgrößen ergeben, die in der Anordnung zu Wellenmatrizen die Verzweigung kennzeichnen. Für die hier vorliegenden speziellen Leitungsnetzwerke wird nun das generelle Verfahren sinngemäß übertragen. Dabei können wir unmittelbar von der Ersatzbilddarstellung des realen Netzwerkes ausgehen, da durch Idealisierung von Bauteileigenschaften bereits die Elemente des abstrakten Netzwerkmodelles über mathematische

Definitionen eingeführt sind. (Wir sprechen aber auch weiterhin von Netzwerk, Leitung usw. statt von Netzwerkmodell, Leitungsersatzschaltbild usw., wenn eine Verwechslung zwischen der physikalischen Form und seinem abstrakten Symbol ausgeschlossen erscheint.)

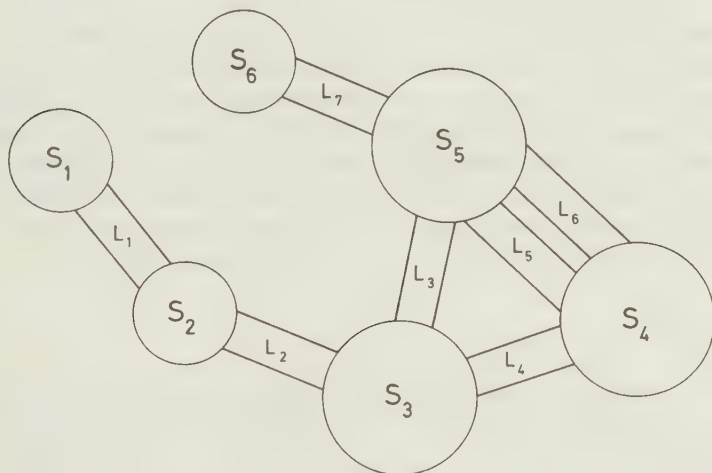


Bild 2/5: Aufteilung der allgemeinen Struktur des Grundmodells der betrachteten Leitungsnetzwerke in Elementarleitungen ($L_1, L_2, \dots$) und Stoßstellen ($S_1, S_2, \dots$)

Die allgemeine Struktur der hier betrachteten Netzwerke zeigt Bild 2/5. Sie ist in zwei Bereichsarten unterteilt, nämlich in Elementarleitungen ($L_1, L_2, \dots$) und in Stoßstellen ($S_1, S_2, \dots$). Die Elementarleitungen entsprechen den physikalischen Raumbereichen 1. Art. Die Stoßstellen sind die Verbindungs- und Endpunkte von Elementarleitungen; sie entsprechen zwar den Raumbereichen 2. Art, sind aber im

Gegensatz zu den physikalischen Verzweigungen und damit zu den Raumbereichen 2. Art als nicht ausgedehnt zu betrachten. Stoßstellen entstehen immer dort, wo Elementarleitungen in andere Elementarleitungen oder in konzentrierte Elemente übergehen. So können beispielsweise die Stoßstellen konzentrierte Elemente in Form von Quellen oder Verbrauchern enthalten.

Zur Veranschaulichung ist in Bild 2/6 die Schaltung und die Struktur eines einfachen Leitungsnetzwerkes angegeben. Das Netzwerk besteht aus einer zwischen Generator und Abschlußwiderstand betriebenen Kaskadenschaltung zweier über einen Serienwiderstand verbundener Elementarleitungen. Die Struktur zerfällt in die Elementarleitungen L_1 , L_2 und die Stoßstellen S_1 , S_2 und S_3 . Die Stoßstelle S_1 enthält eine Quelle, die Stoßstellen S_2 und S_3 enthalten je einen Widerstand (auf Bild 2/6 wird im folgenden öfter zurückgegriffen).

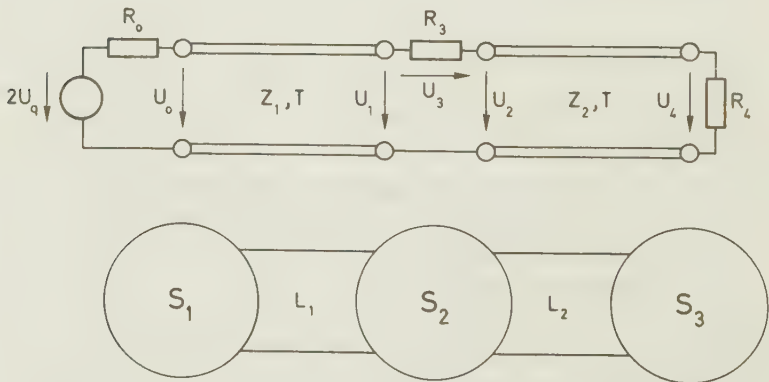


Bild 2/6: Schaltung und Struktur eines einfachen Leitungsnetzwerkes

Über die Stoßstellen werden durch Transmission und Reflexion der Wellen die elektrischen Zustände der verschiedenen angrenzenden Elementarleitungen miteinander verknüpft. Die rücklaufenden Wellen auf den Leitungen werden dabei zu hinlaufenden Wellen für die Stoßstellen, die rücklaufenden Wellen von den Stoßstellen zu hinlaufenden Wellen für die Leitungen.

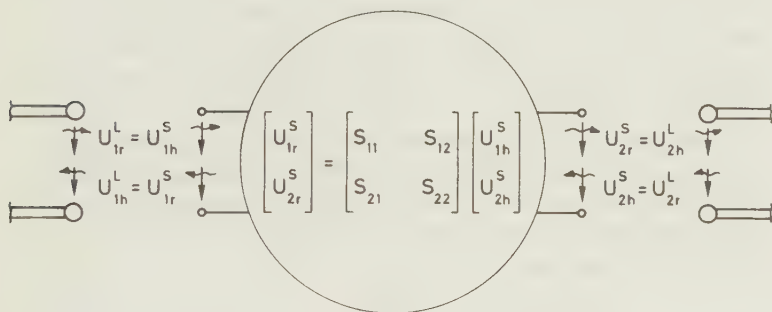


Bild 2/7: Spannungswellen an der Stoßstelle zwischen zwei Leitungen

Bild 2/7 zeigt die Verhältnisse für die Spannungswellen an einer Stoßstelle zwischen zwei Leitungen. Die sich auf die Stoßstellen beziehenden Wellen sind zur Unterscheidung von den Leitungswellen mit dem hochgestellten Index S, die Leitungswellen mit dem hochgestellten Index L versehen. Von der zusätzlichen Indizierung wird im folgenden aber nur dann Gebrauch gemacht, wenn der Bezug besonders betont werden soll oder wenn er ohne Indizierung unklar bleibt. Im allgemeinen erübrigt sich die Indizierung, wenn der Bezug bereits durch Laufpfeile gekennzeichnet ist.

Die Eigenschaft der Stoßstellen, Wellen miteinander zu verknüpfen, wird durch Wellenmatrizen ausgedrückt, von denen sich für eine sinnvolle Kennzeichnung die Streumatrix und die Transmissionsmatrix eignen.

Die spätere Beschreibung der Leitungsnetzwerke durch Signalflußgraphen und durch Zustandsgleichungen geht von den Streumatrizen aus. Die Unterteilung der Netzwerkstruktur in die beiden Strukturelemente Stoßstelle und Elementarleitung tritt bei der Gliederung der Signalflußgraphen und Zustandsgleichungen wieder auf, für deren Aufbau die noch unbekannten Streumatrizen der Stoßstellen ermittelt werden müssen. Von den Eigenschaften der Streumatrizen (z.B. 2/4, 5, 6) interessiert hier die Bestimmbarkeit ihrer Elemente durch Schaltungsanalyse und durch Umrechnung aus Strom-Spannungsmatrizen. Da sich die verschiedenen Typen von Streumatrizen (für Spannungswellen, Stromwellen, Leistungswellen) ineinander umrechnen lassen, genügt die Betrachtung eines Typs, z.B. der Spannungstreumatrix. Da wir uns speziell für Spannungswellen interessieren, wird im folgenden in Anlehnung an Oswald (2/4) unter Streumatrix die Spannungstreumatrix verstanden.

2.3.2 Streumatrixbestimmung von Stoßstellen

In der Mikrowellentechnik läßt sich eine allgemeine Verzweigung als n -Tor beschreiben, wobei n die Anzahl der Ersatzleitungen im Ersatzschaltbild der Verzweigung angibt. Die Stoßstellen der hier betrachteten Netzwerke sind Ersatzschaltbilder idealisierter physikalischer verzweigungen und lassen sich demnach wie diese als Mehrttore behandeln.

Bild 2/8 zeigt eine als Mehrtor aufgefaßte Stoßstelle. Die für die Streumatrixbestimmung angepaßt zu denkenden n Elementarleitungen sind, unter Anwendung der Äquivalenz zwischen angepaßter Leitung und Widerstand, als Abschlußwiderstände des Mehrtors dargestellt. Da erregende Leitungen einer Wellenquelle entsprechen und diese in konzentrierte Quellen umgeformt werden können, läßt sich so das gesamte durch Leitungen beschaltete Mehrtor in eine konzentrierte Schaltung überführen. In Bild 2/8 ist der Fall angenommen, daß die Stoßstelle nur durch eine hinlaufende Welle erregt wird, und zwar

durch die Welle U_{jh} am Tor j , dessen zuführende Leitung durch eine Spannungsquelle ersetzt ist.

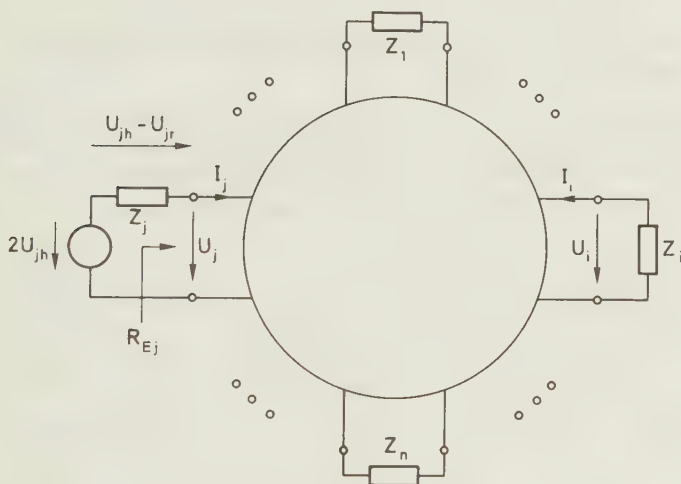


Bild 2/8: Zur Streumatrixbestimmung der als Mehrtor aufgefaßten Stoßstelle

Die von der vorerst quellenfrei angenommenen Stoßstelle rücklaufenden Wellen $\underline{U}_r$ sind mit den hinlaufenden Wellen $\underline{U}_h$ durch die gesuchte, n -reihig quadratische Streumatrix $\underline{S}$ verknüpft.

$$\underline{U}_r = \underline{S} \underline{U}_h. \quad (2/3.1)$$

Das Element S_{ij} der Streumatrix $\underline{S}$ ist das Verhältnis der am i -ten Tor rücklaufenden Welle U_{ir} zu der am j -ten Tor hinlaufenden Welle U_{jh} , wenn sonst keine weiteren hinlaufenden Wellen existieren:

$$S_{ij} = \frac{U_{ir}}{U_{jh}} = \frac{U_i - Z_i I_i}{U_j + Z_j I_j}; \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2/3.2)$$

$U_{ih} = 0 \text{ für } i \neq j.$

Für den Eigenreflexionsfaktor am Tor j gilt speziell

$$S_{jj} = \frac{U_{jr}}{U_{jh}} = \frac{R_{Ej} - Z_j}{R_{Ej} + Z_j} ; \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2/3.3)$$

$U_{ih} = 0$ für $i \neq j$.

Die Größe R_{Ej} ist der Eingangswiderstand des abgeschlossenen Mehrtors am Tor j .

Die Streukoeffizienten außerhalb der Hauptdiagonalen stehen mit einigen charakteristischen Übertragungsfunktionen des beschalteten Mehrtors in der Beziehung

$$S_{ij} = \frac{U_i}{U_{jh}} \quad (2/3.4a)$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

$$= \frac{2}{R_{Ej} + Z_j} \cdot \frac{U_i}{I_j} \quad i \neq j \quad (2/3.4b)$$

$$U_{ih} = 0$$

$$= - \frac{2Z_j}{R_{Ej} + Z_j} \cdot \frac{I_i}{I_j} . \quad (2/3.4c)$$

Allgemein lassen sich also die Streukoeffizienten durch eine Analyse des beschalteten Mehrtors gewinnen; dabei kann in Bezug auf die beiden Tore i und j das beschaltete Mehrtor als Zweitor aufgefaßt werden.

Zur Verdeutlichung des Verfahrens sollen die Streukoeffizienten der Stoßstelle S_2 des in Bild 2/6 gezeigten Leitungsnetzwerks durch Schaltungsanalyse ermittelt werden. Bild 2/9 gibt die Schaltung zur Bestimmung der Koeffizienten S_{11} und S_{21} an; die Beziehung zur allgemeinen Schaltung in Bild 2/8 und zu den entsprechenden Gleichungen (2/3.1) bis (2/3.4) ist über $n=2$, $j=1$, $i=2$ gegeben.

Aus Gl.(2/3.3) ergibt sich der Koeffizient S_{11} mit

$$R_{E1} = Z_2 + R_3 \quad (2/3.5a)$$

zu

$$S_{11} = \frac{Z_2 + R_3 - Z_1}{Z_2 + R_3 + Z_1} . \quad (2/3.5b)$$

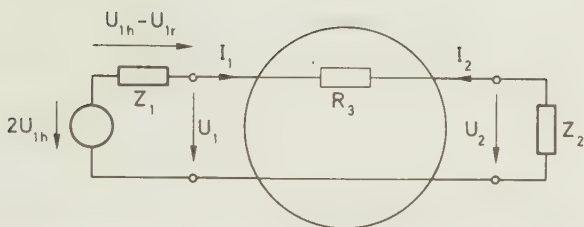


Bild 2/9: Schaltung zur Bestimmung der Streukoeffizienten S_{11} und S_{21} der Stoßstelle S_2 in Bild 2/6

Mit der Spannungsteilerbeziehung

$$\frac{U_2}{2U_{1h}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.5c)$$

erhält man aus Gl.(2/3.4a) unmittelbar den Koeffizienten

$$S_{21} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.5d)$$

Wegen der Schaltungssymmetrie ergeben sich die noch fehlenden Koeffizienten S_{22} und S_{12} durch Vertauschen der Indizes 1 und 2 in Gl.(2/3.5). Die in Gl.(2/3.1) aufgeführte Streumatrixbeziehung lautet für das hier behandelte Beispiel der Stoßstelle von zwei über einen Serienwiderstand verbundenen Leitungen

$$\begin{bmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 1-r_1 \\ 1-r_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1h} \\ U_{2h} \end{bmatrix}, \quad (2/3.6a)$$

wobei zur Abkürzung

$$r_1 = S_{11} = \frac{Z_2 + R_3 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.6b)$$

und

$$r_2 = S_{22} = \frac{Z_1 + R_3 - Z_2}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.6c)$$

gesetzt wurde.

Sind die Strom-Spannungsmatrizen des passiven Mehrtors bekannt, z.B. die Widerstandsmatrix $\underline{R}$ oder die Leitwertmatrix $\underline{G}$, definiert durch

$$\underline{U} = \underline{R}\underline{I}, \quad (2/3.7a)$$

bzw.

$$\underline{I} = \underline{G}\underline{U}, \quad (2/3.7b)$$

so ergibt sich die Streumatrix $\underline{S}$ unter Benutzung der Referenzmatrix $\underline{R}_0$ und der Einheitsmatrix $\underline{E}$ zu

$$\underline{S} = (\underline{R} - \underline{R}_0)(\underline{R} + \underline{R}_0)^{-1} \quad (2/3.8a)$$

$$= (\underline{E} - \underline{R}_0 \underline{G})(\underline{E} + \underline{R}_0 \underline{G})^{-1}. \quad (2/3.8b)$$

Für die Streumatrix einer Stoßstelle mit n angrenzenden Elementarleitungen ist als Referenzmatrix die Diagonalmatrix

$$\underline{R}_0 = \underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & Z_n \end{bmatrix} \quad (2/3.9)$$

einzusetzen, deren Elemente durch die Wellenwiderstände der n angrenzenden Elementarleitungen gebildet werden.

Zur Erläuterung betrachten wir die Stoßstelle S_3 in Bild 2/6, deren Widerstandsmatrix aus der Einelementmatrix

$$\underline{R} = [\underline{R}_4] \quad (2/3.10a)$$

besteht. Als Referenzmatrix ergibt sich mit dem Wellenwiderstand Z_2 der zuführenden Elementarleitung die Matrix

$$\underline{R}_0 = [\underline{Z}_2]. \quad (2/3.10b)$$

Die Anwendung von Gl.(2/3.8a) führt auf die einelementige Streumatrix

$$\underline{S} = [\underline{R}_4 - \underline{Z}_2][\underline{R}_4 + \underline{Z}_2]^{-1} = [r_3], \quad (2/3.10c)$$

wobei zur Abkürzung

$$r_3 = \frac{R_4 - Z_2}{R_4 + Z_2} \quad (2/3.10d)$$

gesetzt wurde.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf die Streumatrixbestimmung quellenfreier Stoßstellen. Wir behandeln im folgenden den Fall, daß die betrachtete Stoßstelle eine mit dem Innenwiderstand R_q behaftete Quelle enthält, die eine eingeprägte Welle der Größe U_q zu liefern vermag. Die von den Stoßstellen rücklaufenden Wellen $\underline{U}_r$ hängen jetzt nicht mehr allein von den hinlaufenden Wellen $\underline{U}_h$ ab, sondern noch zusätzlich von der Quellwelle U_q :

$$\underline{U}_r = \underline{S}_{-h} + \underline{S}_q U_q \quad (2/3.11)$$

Die Streumatrix $\underline{S}$ gibt die innere, quellenlose Streuung der Stoßstelle in bezug auf die hinlaufenden Wellen $\underline{U}_h$ an. Sie läßt sich bestimmen, wenn für die Quellwelle $U_q=0$ angenommen wird. Es interessiert die Bestimmung des Quell-Spaltenvektors $\underline{S}_q$.

Sowohl die Streumatrix $\underline{S}$ als auch der Spaltenvektor $\underline{S}_q$ lassen sich nun aus einer Streumatrix $\tilde{\underline{S}}$ herleiten, die die passiven Streueigenschaften des um ein Tor erweiterten Mehrtors kennzeichnet. Das zusätzliche Tor μ trennt die als Wellenquelle aufgefaßte Quelle vom Restnetzwerk; die Urwelle U_q ist jetzt hinlaufende Welle $U_{\mu h}$ am Tor μ , der Abschlußwiderstand Z_μ des Tores ist der Quellinnenwiderstand R_q . Für das so erhaltene $(n+1)$ -Tor wird die kennzeichnende Streumatrix $\tilde{\underline{S}}$ bestimmt. Durch Streichen der μ -ten Zeile in der zugehörigen Matrizen-Gleichung

$$\tilde{\underline{U}}_r = \tilde{\underline{S}} \tilde{\underline{U}}_h \quad (2/3.12)$$

wird die im allgemeinen nicht interessierende Beziehung für die rücklaufende Welle $U_{\mu r}$ entfernt und durch Trennen der

μ -ten Spalte des verbleibenden Gleichungssystems der von der hinlaufenden Welle $U_{\mu h}$ herrührende Anteil gesondert aufgeführt. Damit ist Gl.(2/3.12) auf Gl.(2/3.11) reduziert: die Matrix $\underline{S}$ ist die Restmatrix, die sich ergibt, wenn in $\tilde{\underline{S}}$ die μ -te Zeile und Spalte gestrichen werden; der Vektor $\underline{S}_q$ ist die um das μ -te Element gekürzte μ -te Spalte von $\tilde{\underline{S}}$, und die Quellwelle U_q entspricht der fiktiven hinlaufenden Welle $U_{\mu h}$.

Das Verfahren sei an dem einfachen Beispiel der Stoßstelle S_1 aus Bild 2/6 erläutert, für die die Streumatrix $\underline{S}$ und der Spaltenvektor $\underline{S}_q$ bestimmt werden sollen. In Bild 2/10 sind einander die ursprüngliche Form der Stoßstelle S_1 als Ein-tor ($n=1$) und die zum Zweitor ($\mu=2$) erweiterte Form gegenübergestellt. (Als Index für die Spannungen ist der Torindex eingesetzt; der Quellinnenwiderstand ist $R_q=R_0$).

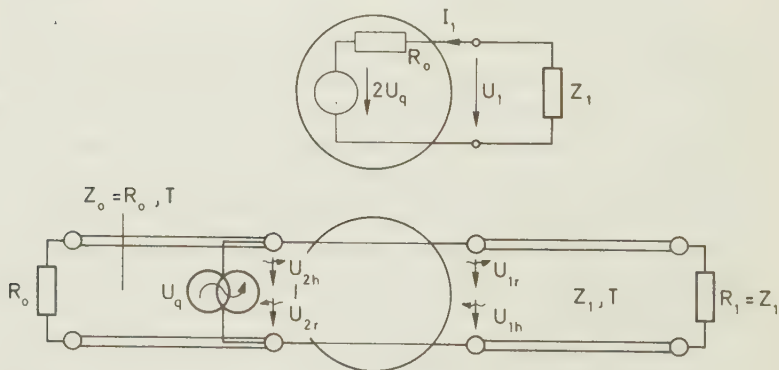


Bild 2/10: Darstellung der Stoßstelle S_1 aus Bild 2/6 in ursprünglicher und in erweiterter Form

Die erweiterte Form der Stoßstelle S_1 ergibt sich als Spezialfall der Stoßstelle S_2 aus Bild 2/6, wenn dort für den Serienwiderstand R_3 der Wert $R_3=0$ gesetzt wird. Für die Zweitor-Form der Stoßstelle S_1 können daher unmittelbar die für die Stoßstelle S_2 erhaltenen Ergebnisse übernommen werden.

Die Streubeziehung für das Zweitor lautet mit sinngemäßer Anwendung der Gl.(2/3.6)

$$\begin{bmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_o & 1+r_o \\ 1-r_o & r_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1h} \\ U_{2h} \end{bmatrix}, \quad (2/3.13a)$$

wobei zur Abkürzung

$$r_o = \frac{R_1 - R_o}{R_1 + R_o} \quad (2/3.13b)$$

gesetzt wurde.

Gl.(2/3.13a) ist die für das behandelte Beispiel geltende Spezialisierung von Gl.(2/3.12). Durch Streichen der zweiten Zeile und Spalte der durch Gl.(2/3.13a) bestimmten Streumatrix $\tilde{S}$ ergibt sich die Streumatrix $\underline{S}$ der Stoßstelle S_1 zu

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} -r_o \end{bmatrix}. \quad (2/3.13c)$$

Der Spaltenvektor $\underline{S}_q$ ist die um das zweite Element gekürzte zweite Spalte der Matrix $\tilde{S}$, nämlich

$$\underline{S}_q = \begin{bmatrix} 1+r_o \end{bmatrix}. \quad (2/3.13d)$$

In dem gewählten einfachen Beispiel erweist sich die erste Zeile der durch Gl.(2/3.13a) gegebenen Matrizengleichung als die gesuchte, durch Gl.(2/3.11) allgemein ausgedrückte Beziehung für die interessierende rücklaufende Welle

$$\underline{U}_r = \begin{bmatrix} U_{1r} \end{bmatrix}.$$

Die Methode, verborgene konzentrierte Elemente durch Herausziehen und damit Erweitern des Mehrtors zu separieren, läßt sich auch auf Widerstände allein anwenden. Diesen Schritt wird man zweckmäßigerweise dann vornehmen, wenn die Spannung U_v an dem als Verbraucher aufgefaßten Widerstand R_v als Funktion der auf die Stoßstellen hinlaufenden Wellen $\underline{U}_h$ interessiert. Die zu ermittelnde Größe ist der Verbraucher-Zellenvektor $\underline{S}_v$ der Verknüpfungsgleichung

$$\underline{U}_v = \underline{S}_v \underline{U}_h. \quad (2/3.14)$$

Nach Erweiterung des Mehrtors um das zusätzliche ν -te Tor, das mit einer Leitung des Wellenwiderstandes $Z_\nu = R_\nu$ zu beschalten ist, ergibt sich die gesuchte Verbraucherspannung U_ν als die dort rücklaufende Welle $U_{\nu r}$. Ist die Streumatrix $\tilde{S}$ des erweiterten Mehrtors bekannt, so gibt die ν -te Zeile der in Gl.(2/3.12) allgemein ausgedrückten Beziehung die gesuchte Abhängigkeit an. Da im Betriebsfall keine hinlaufende Welle am Tor ν existiert, d.h. $U_{\nu h} = 0$ ist, interessiert das ν -te Element der ν -ten Zeile von Gl.(2/3.12) nicht und kann daher gestrichen werden: die um das ν -te Element gestrichene ν -te Zeile der Streumatrix $\tilde{S}$ des um das Tor ν erweiterten Mehrtors ist der gesuchte Verbraucher-Zeilenvektor $\underline{S}_\nu$.

Als Anwendungsbeispiel des Verfahrens sei für die in Bild 2/6 gezeigte Stoßstelle S_2 die Spannung an dem dort verborgenen Widerstand in Abhängigkeit von den auf die Stoßstelle zulaufenden Wellen bestimmt. Bild 2/11 gibt die auf ein drittes Tor erweiterte Form der Stoßstelle S_2 in der Darstellung mit Leitungen an und die zugehörige konzentrierte Schaltung zur Streumatrixbestimmung unter der Annahme, daß Tor 1 erregt wird.

Für die zunächst interessierende Streumatrix $\tilde{S}$ sei exemplarisch der Koeffizient $\tilde{S}_{31}$ ermittelt. Gl.(2/3.4a) liefert mit $i=3$, $j=1$ und dem Spannungsteilerverhältnis

$$\frac{U_3}{2U_{1h}} = \frac{R_3}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.15a)$$

unmittelbar

$$\tilde{S}_{31} = \frac{2R_3}{Z_1 + Z_2 + R_3} \quad (2/3.15b)$$

bzw.

$$\tilde{S}_{31} = r_1 + r_2, \quad (2/3.15c)$$

wenn die Abkürzungen von Gl.(2/3.6) benutzt werden. Die Streumatrix $\tilde{S}$ lautet, unter Benutzung von Gl.(2/3.6)

$$\underline{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} r_1 & 1-r_1 & 1-r_1 \\ 1-r_2 & r_2 & -(1-r_2) \\ r_1+r_2 & -(r_1+r_2) & 1-(r_1+r_2) \end{bmatrix} \quad (2/3.15d)$$

Mit $U_{3h}=0$ folgt für die gesuchte Spannung U_3 am Widerstand R_3 schließlich

$$U_3 = U_{3r} = (r_1+r_2) U_{1h} - (r_1+r_2) U_{2h} \quad (2/3.15e)$$

Der Verbraucher-Zeilenvektor $\underline{S}_V$ aus Gl.(2/3.14) hat hier die spezielle zwispaltige Form

$$\underline{S}_V = \begin{bmatrix} (r_1+r_2) & -(r_1+r_2) \end{bmatrix} \quad (2/3.15f)$$

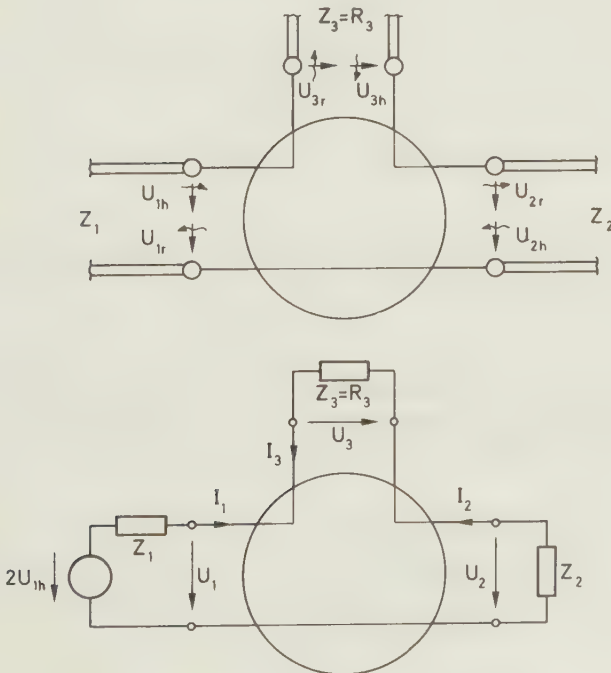


Bild 2/11: Zur Spannungsermittlung an dem in der Stoßstelle S_2 von Bild 2/6 enthaltenen Widerstand

Die Erweiterung des Mehrtors durch zusätzliche Tore kann offenbar solange sinnvoll fortgesetzt werden, bis alle verborgenen, konzentrierten Elemente durch ein eigenes Tor berücksichtigt sind und die verbleibende Stoßstelle keine weiteren Elemente mehr enthält. Bei einer Stoßstelle mit ursprünglich n angrenzenden Leitungen, p verdeckten passiven Elementen und q verborgenen Quellen besitzt das schließlich erhaltene Mehrtor

$$m = n+p+q \quad (2/3.16)$$

Tore und wird durch eine m -reihige, quadratische (Gesamt-) Streumatrix $\underline{S}_{\text{ges}}$ beschrieben:

$$\underline{U}_{\text{rges}} = \underline{S}_{\text{ges}} \underline{U}_{\text{hges}} \quad (2/3.17)$$

Unterteilt man sämtliche hin- und rücklaufenden Wellen ($\underline{U}_{\text{hges}}$ und $\underline{U}_{\text{rges}}$) nach den drei Torgruppen auf, so geht Gl.(2/3.17) über in die Form

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{\text{nr}} \\ \underline{U}_{\text{pr}} \\ \underline{U}_{\text{qr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{\text{nn}} & \underline{S}_{\text{np}} & \underline{S}_{\text{nq}} \\ \underline{S}_{\text{pn}} & \underline{S}_{\text{pp}} & \underline{S}_{\text{pq}} \\ \underline{S}_{\text{qn}} & \underline{S}_{\text{qp}} & \underline{S}_{\text{qq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{\text{nh}} \\ \underline{U}_{\text{ph}} \\ \underline{U}_{\text{qh}} \end{bmatrix}, \quad (2/3.18)$$

wobei zur Indizierung der Torart vereinfachend die gleichen Buchstaben Verwendung finden wie für die Symbolisierung der jeweiligen Toranzahl.

Da im Betriebsfall die quellenfreie Torgruppe p angepaßt ist, sind von dort aus keine hinlaufenden Wellen möglich; d.h. die Unterspalte $\underline{U}_{\text{ph}}$ in Gl.(2/3.18) ist komponentweise Null. Von Gl.(2/3.18) interessiert daher nur die reduzierte Form

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{\text{nr}} \\ \underline{U}_{\text{pr}} \\ \underline{U}_{\text{qr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{\text{nn}} & \underline{S}_{\text{nq}} \\ \underline{S}_{\text{pn}} & \underline{S}_{\text{pq}} \\ \underline{S}_{\text{qn}} & \underline{S}_{\text{qq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{\text{nh}} \\ \underline{U}_{\text{qh}} \end{bmatrix} \quad (2/3.19)$$

Die Untermatrizen in Gl.(2/3.19) haben für die ursprüngliche Stoßstelle folgende Bedeutung:

- $\underline{S}_{nn}$ ist die Streumatrix $\underline{S}$, sie charakterisiert die innere (quellenlose) Streuung in bezug auf die Wellen der n angrenzenden Elementarleitungen;
- $\underline{S}_{nq}$ gibt die Verteilung der Quellwellen auf die Elementarleitungen an;
- $\underline{S}_{pn}$ beschreibt den Anteil der Verbraucherspannungen, der von den auf die Stoßstellen hinlaufenden Wellen der Elementarleitungen herrührt;
- $\underline{S}_{pq}$ beschreibt den Anteil der Verbraucherspannungen auf Grund der inneren Quellen;
- $\underline{S}_{qn}$ bestimmt den von den Leitungswellen hervorgerufenen Spannungsabfall an den Innenwiderständen der Quellen;
- $\underline{S}_{qq}$ gibt die Eigenreflexion der Quellwellen an und ist ein Maß für die Anpassung der Wellenquellen.

Zur Erläuterung der in Gl.(2/3.18) bzw. Gl.(2/3.19) verwendeten allgemeinen Symbole sei deren spezielle Bedeutung für die Streubeziehungen der in Bild 2/6 angegebenen Stoßstellen S_1 und S_2 aufgezeigt. Die durch Gl.(2/3.13a) bzw. Gl.(2/3.15d) gegebene Streumatrix $\underline{\tilde{S}}$ stellt bereits die Gesamtstreumatrix $\underline{S}_{ges}$ dar, da die jeweils um ein Tor erweiterten Formen der Stoßstellen keine weiteren konzentrierten Elemente mehr enthalten.

Bei der erweiterten Form der Stoßstelle S_1 gehört das Tor 1 zur Torgruppe n , das Tor 2 zur Torgruppe q (siehe auch Bild 2/10). Die Torgruppe p ist nicht vertreten.

Mit den Bezeichnungen aus Gl.(2/3.13) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nr} &= \begin{bmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{bmatrix} , & \underline{U}_{nh} &= \begin{bmatrix} U_{1h} \\ U_{2h} \end{bmatrix} , \\ \underline{U}_{qr} &= \begin{bmatrix} U_{2r} \end{bmatrix} , & \underline{U}_{qh} &= \begin{bmatrix} U_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{nn} &= \underline{S} = \begin{bmatrix} -r_0 \end{bmatrix} , & \underline{S}_{nq} &= \underline{S}_q = \begin{bmatrix} 1+r_0 \end{bmatrix} , \\ \underline{S}_{qn} &= \begin{bmatrix} 1-r_0 \end{bmatrix} , & \underline{S}_{qq} &= \begin{bmatrix} r_0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Bei der erweiterten Form der Stoßstelle S_2 gehören die Tore 1 und 2 zur Torgruppe n, das Tor 3 zur Torgruppe p (siehe auch Bild 2/11). Die Torgruppe q ist nicht vertreten. Mit den Bezeichnungen aus Gl.(2/3.6) und Gl.(2/3.15) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{nr} &= \begin{bmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \end{bmatrix} , & \underline{U}_{nh} &= \begin{bmatrix} U_{1h} \\ U_{2h} \end{bmatrix} , \\ \underline{U}_{pr} &= \begin{bmatrix} U_{3r} \end{bmatrix} , & \underline{U}_{ph} &= \begin{bmatrix} U_{3h} \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

$$\underline{S}_{nn} = \underline{S} = \begin{bmatrix} r_1 & 1-r_1 \\ 1-r_2 & r_2 \end{bmatrix} , \quad \underline{S}_{np} = \begin{bmatrix} -(1-r_2) \end{bmatrix} ,$$

$$\underline{S}_{pn} = \underline{S}_v = \begin{bmatrix} (r_1+r_2) - (r_1+r_2) \end{bmatrix} , \quad \underline{S}_{pp} = \begin{bmatrix} 1-(r_1+r_2) \end{bmatrix} .$$

2.3.3 Modifizierte Netzwerkstruktur

Für die spätere Beschreibung durch Zustandsgleichungen und für die Entwicklung eines mathematischen Modells zur automatischen Analyse des Zeitverhaltens erweist es sich als zweckmäßig, die unmittelbar gegebene Struktur eines Netzwerks durch die Verwendung wellenmäßiger Ersatzbilder zu modifizieren. Die Modifikation besteht in einer einheitlichen Darstellung von Widerständen, falls die an ihnen abfallenden Spannungen interessieren, und von Quellen.

a) Darstellung von Widerständen

Interessieren die Spannungen an einzelnen Widerständen, so sind die Widerstände in der Regel durch ihr wellenmäßiges Ersatzbild darzustellen; als Ersatzleitung wird zweckmäßigerweise eine Elementarleitung gewählt.

Die Modifikation ist nicht erforderlich, wenn die interessierende Spannung zugleich Torspannung an einer Elementarleitung ist.

b) Darstellung von Quellen

Quellen sind als Wellenquellen darzustellen; als Quellleitung dient zweckmäßigerweise ebenfalls eine Elementarleitung.

Bild 2/12 zeigt für das in Bild 2/6 aufgeführte Netzwerk die Schaltung und die Struktur in modifizierter Form. Dabei ist angenommen, daß die Spannungen am Widerstand R_3 und am Widerstand R_4 interessieren. Der Widerstand R_3 ist im Gegensatz zum Widerstand R_4 durch sein wellenmäßiges Ersatzbild dargestellt, da die an ihm abfallende Spannung nicht Torspannung einer Elementarleitung ist. Im Vergleich zur ursprünglichen Schaltung erhöht sich die Anzahl der Elementarleitungen von zwei auf vier und die Anzahl der Stoßstellen von drei auf fünf.

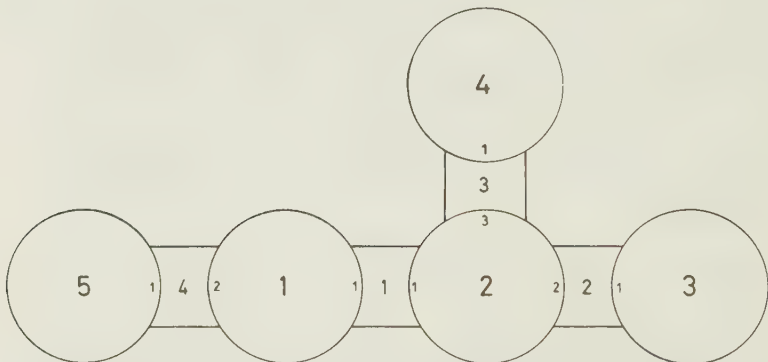
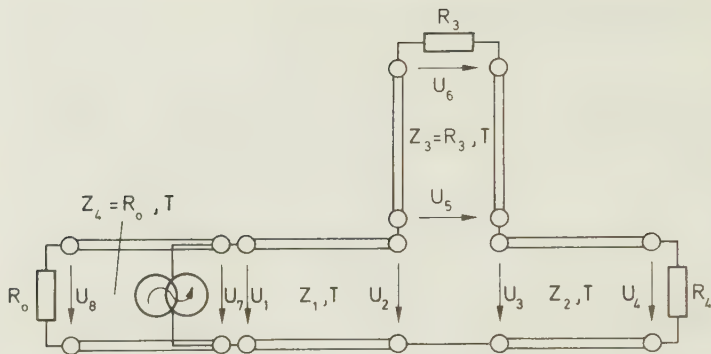


Bild 2/12: Schaltung und Struktur des in Bild 2/6 aufgeführten Netzwerkes in modifizierter Form

Weiterhin ist es zweckmäßig, die Spannungen in dem zu untersuchenden Netzwerk in eindeutiger Weise zu indizieren (s. Bild 2/12). Das hier gewählte Verfahren bezieht sich auf die Torspannungen der Elementarleitungen und geht in folgenden Schritten vor.

- 1) In der modifizierten Netzwerkstruktur sind die Elementarleitungen und die Stoßstellen in fortlaufender Numerierung von der Zahl Eins an zu kennzeichnen.

- 2) In gleicher Weise sind die Tore jeder einzelnen Stoßstelle zu numerieren.
- 3) Als unteres Tor (Anfang) einer Elementarleitung wird dasjenige Tor bezeichnet, das an die Stoßstelle mit dem niedrigeren Index stößt. Führt die Elementarleitung auf die gleiche Stoßstelle zurück, so gibt der niedrigere Torindex der Stoßstelle den Anfang der Elementarleitung an.
- 4) Die Spannungen an den Toren der i -ten Elementarleitung erhalten die Indizes $2i$ und $2i-1$. Die Spannung am oberen Tor (Ende) erhält den Index $2i$, die am unteren den Index $2i-1$.

Außer der Indizierung der Spannungen ist eine einheitliche Festlegung ihrer Richtung von Vorteil. Diese Frage ist aber erst bei der Erstellung des automatischen Analyseprogramms von Wichtigkeit und wird dort im Abschnitt 6.3.2 wieder aufgegriffen. Vorerst wird an der Bepfeilung der Elementarleitungen nach Bild 2/1 festgehalten.

Durch die wellenmäßige Ersetzung von Widerständen und Quellen des ursprünglichen Netzwerks gehen die an ihren Klemmen interessierenden Spannungen über in Torspannungen von Elementarleitungen. In der modifizierten Struktur liegt die gesuchte Spannung am Verbindungstor der Ersatzleitung und der veränderten Stoßstelle; die Spannung am Tor der neu entstandenen, außen liegenden Stoßstelle der Ersatzleitung ist eine formale Größe, die für das ursprüngliche Netzwerk keine Bedeutung hat. Zur Erläuterung: In der in Bild 2/12 gezeigten modifizierten Struktur zu der in Bild 2/6 gegebenen Schaltung ist die Torspannung U_5 der Ersatzleitung L_3 gleich der Spannung am Widerstand R_3 des ursprünglichen Netzwerks (Stoßstelle S_2) und die Torspannung U_7 der Ersatzleitung L_4 gleich der Klemmenspannung der konzentrierten Quelle (Stoßstelle S_1). Die an den neu entstandenen Stoßstellen S_4 und S_5 formal indizierten Spannungen U_6 und U_8 sind ohne Belang für die ursprüngliche Schaltung.

3. Beschreibung des Grundmodells

3.1 Beschreibung durch Signalflußgraphen

3.1.1 Definition des linearen Signalflußgraphen

Ein linearer Signalflußgraph nach Mason (3/1,2,3) ist die topologische Darstellung (s.Bild 3/1) eines Systems linearer algebraischer Gleichungen der Form

$$\underline{V} = \underline{G} \underline{V} + \underline{V}'. \quad (3/1.1)$$

Die unabhängigen Variablen sind die Elemente des Vektors $\underline{V}'$, die abhängigen die des Vektors $\underline{V}$ (sie tauchen in dem Gleichungssystem in expliziter Form auf). Die Variablen werden als Knoten des Signalflußgraphen dargestellt. Die Knoten V'_i dienen als externe Quellen der zugehörigen inneren Knoten V_i und sind mit diesen durch einen Zweig mit dem Gewicht Eins verbunden. Die Elemente der Verknüpfungsmatrix $\underline{G}$ bilden die Zweiggewichte für die Verbindungen der inneren Knoten.

Die Auflösung des Gleichungssystems nach $\underline{V}$ ergibt (mit $\underline{E}$ als Einheitsmatrix)

$$\underline{V} = (\underline{E} - \underline{G})^{-1} \underline{V}' = \underline{F} \underline{V}'. \quad (3/1.2)$$

Die Elemente der Übertragungsmatrix $\underline{F}$ sind die Übertragungsfunktionen

$$\frac{V_i}{V'_j} = F_{ij}, \quad (3/1.3)$$

die sich topologisch durch Analyse des Signalflußgraphen ermitteln lassen (s. auch Kapitel 8).

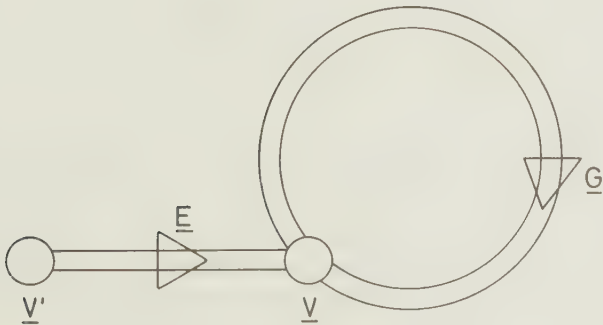
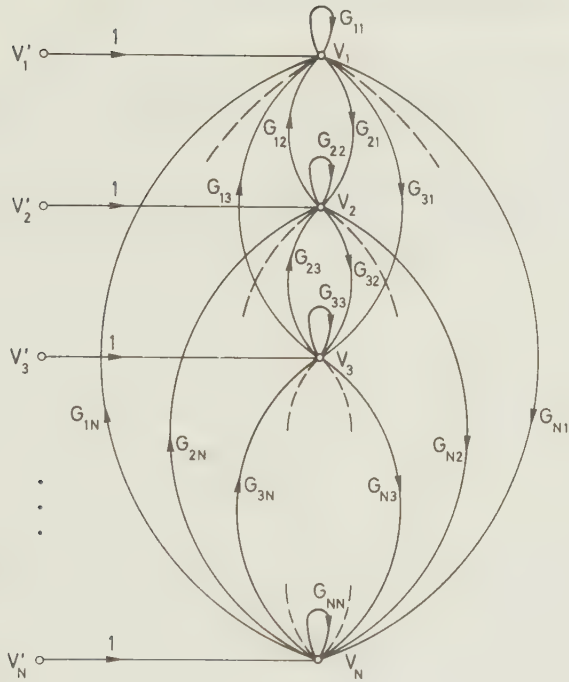


Bild 3/1: Allgemeiner Signalflußgraph und zugehöriges Vektorflußdiagramm

3.1.2 Darstellung von Reflexionsvorgängen durch Signalflußgraphen

Mit Hilfe von Signalflußgraphen ist eine anschauliche Beschreibung der gegenseitigen Abhängigkeit der Wellen in den betrachteten Leitungsnetzwerken möglich.

Bereits in einer der ersten Arbeiten von Mason (3/1,2) werden Reflexionsvorgänge durch Signalflußgraphen dargestellt; eine Beschreibung von Zusammenschaltungen aus Leitungen und Widerständen gibt er zusammen mit Zimmermann in einem späteren Werk an (3/3). Über die Behandlung von verwandten Problemen aus der Mikrowellentechnik und über weitere einschlägige Beispiele informieren z.B. auch Aufsätze von Hunton (3/4,5), Dunn (3/6), Ross (3/6,7), Brown (3/8) und Fiebig (3/9). Gemeinsames Merkmal der genannten Arbeiten ist die Kennzeichnung der physikalischen Objekte einer Zusammenschaltung durch die Streumatrix, womit die unmittelbare Ursache-Wirkungsbeziehung der hin- und rücklaufenden Wellen ausgedrückt wird. In den entsprechenden Teilsignalflußgraphen für die verschiedenen Objekte sind den hinlaufenden Wellen als unabhängige Variable die Quellen und den rücklaufenden Wellen als abhängige Variable die Senken zugeordnet. Da bei der Zusammenschaltung der verschiedenen Objekte die rücklaufenden Wellen der einen Objekte gleich den hinlaufenden Wellen für die anderen sind (siehe auch Bild 3/2), gehen in der Signalflußgraphendarstellung die Senken der einen in die Quellen der anderen Teilsignalflußgraphen über. Die einzelnen Signalflußgraphen lassen sich daher unmittelbar durch die Vereinigung zugehöriger Knoten zu einem Gesamtsignalflußgraphen zusammenfügen, da bei dem jeweiligen Verschmelzen zweier Knoten die notwendige Voraussetzung, nämlich die Beteiligung mindestens einer Quelle, erfüllt ist. Durch das bloße Verbinden einfacher und bekannter Teilstrukturen erhält man auch von komplizierten Gesamtschaltungen auf diese Art und Weise leicht den interessierenden Gesamtsignalflußgraphen. Durch

Analyse des so ermittelten Signalflußgraphen gewinnt man dann Übertragungsfunktionen, die das Verhalten der Zusammenschaltung kennzeichnen.

Als erläuterndes Beispiel für die Vereinigung von Teilsignalflußgraphen dient Bild 3/2, das sich auf die in Bild 2/7 behandelte Stoßstelle zwischen zwei Elementarleitungen bezieht. Die Teilsignalflußgraphen sind die topologische Darstellung der Streumatrizen von Stoßstelle und Elementarleitung.

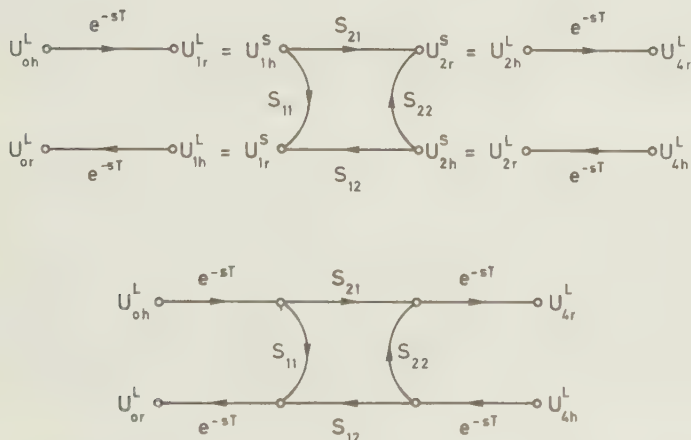


Bild 3/2: Beispiel einer Vereinigung von Teilsignalflußgraphen

3.1.3 Beziehung zwischen Netzwerkstruktur und Signalflußgraph

Die wellenmäßige Betrachtung von Leitungsnetzwerken wird durch die Signalflußgraphenmethode besonders anschaulich, da der Signalfluß selbst im Wandern, Brechen und Reflektieren von Wellen seine enge physikalische Entsprechung findet. Diese Nähe äußert sich auch in der leichten Herleitbarkeit des Gesamtsignalflußgraphen aus der Struktur des Netzwerkes. Bild 3/3 zeigt den Signalflußgraphen zu der in Bild 2/6 eingeführten Schaltung. Dabei ist angenommen, daß die Spannung U_4 am Widerstand R_4 interessiert. Die Zweige sind vollständig beziffert; von den Knoten sind der interessierende Quellknoten U_q und die Senke U_4 markiert. Um die Kongruenz zwischen Netzwerkstruktur und Signalflußgraph noch deutlich herauszuheben, sind in Bild 3/3 zusätzlich die Konturen der Netzwerkstruktur aus Bild 2/6 eingezeichnet. Zusätzlich ist zum Vergleich die Schaltung aus Bild 2/6 mit angegeben.

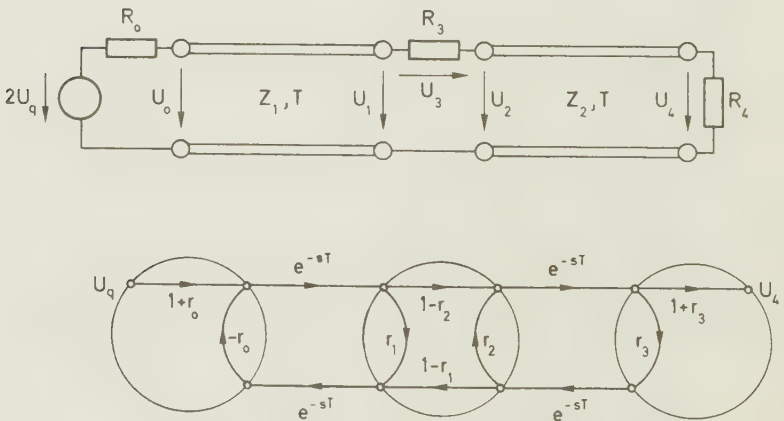


Bild 3/3: Schaltung nach Bild 2/6 und zugehöriger Signalflußgraph zur Bestimmung von U_4/U_q

3.1.4 Ermittlung eines Vektorflußdiagrammes

Die Verallgemeinerung eines Signalflußgraphen für die topologische Darstellung von linearen Matrizengleichungen führt auf Vektorflußdiagramme; das sind gerichtete Graphen, deren Knoten Vektoren bedeuten und deren Zweige Matrizen als Zweiggewichte besitzen. An die Stelle der einzelnen Elemente der Vektoren und Matrizen, die beim Signalflußgraph Knoten und Zweiggewichte ergeben, treten beim Vektorflußdiagramm die Vektoren und Matrizen selbst ein, wodurch sich ein gestraffter Überblick über die Abhängigkeiten gleichartiger Variabler eines Systems ergibt. Im folgenden soll nun ein Vektorflußdiagramm für die betrachteten Leitungsnetzwerke entwickelt werden. Dabei gehen wir von den Strukturelementen des Netzwerkes, nämlich Elementarleitung und Stoßstelle aus, deren Gesamtheit wir durch je ein Vektorflußdiagramm kennzeichnen. Die Verbindung dieser Teildigramme ergibt dann das Vektorflußdiagramm des Gesamtsystems.

Betrachtet werde ein modifiziertes Leitungsnetzwerk, dessen Struktur in s' Stoßstellen und in m' Elementarleitungen unterteilt ist. Die m' Elementarleitungen setzen sich zusammen aus den vor der Modifikation vorhandenen n' ursprünglichen Elementarleitungen, sowie aus p' Elementarleitungen, die durch die wellenmäßige Ersetzung von p' passiven Elementen entstanden sind und aus q' Elementarleitungen, die den Quell-Leitungen der q' Quellen des Netzwerkes entsprechen:

$$m' = n' + p' + q' \quad . \quad (3/1.4)$$

Auf diesen Elementarleitungen sind insgesamt je

$$M = 2m' \quad (3/1.5a)$$

hin- und rücklaufende Wellen $\underline{U}_{Mh}^L$ und $\underline{U}_{Mr}^L$ zu unterscheiden, die sich in je

$$N = 2n' \quad (3/1.5b)$$

Wellen $\underline{U}_{Nh}^L$ und $\underline{U}_{Nr}^L$ auf den ursprünglichen Elementarleitungen, je

$$P = 2p' \quad (3/1.5c)$$

Wellen $\underline{U}_{Ph}^L$ und $\underline{U}_{Pr}^L$ auf den Ersatzleitungen von Widerständen, und aus je

$$Q = 2q' \quad (3/1.5d)$$

Wellen $\underline{U}_{Qh}^L$ und $\underline{U}_{Qr}^L$ auf den Quell-Leitungen der Wellenquellen zusammensetzen:

$$\underline{U}_{Mh,r}^L = \begin{bmatrix} \underline{U}_{Nh,r}^L \\ \underline{U}_{Ph,r}^L \\ \underline{U}_{Qh,r}^L \end{bmatrix} \quad (3/1.6)$$

Das in Abschnitt 2.3.3 besprochene Verfahren zur paarweisen Indizierung der Spannungen an den Elementarleitungen besagt, daß die in Gl.(2/2.6) eingeführte Streumatrixbeziehung der Elementarleitung für die i-te Elementarleitung die Form

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{2i-1,r}^L \\ \underline{U}_{2i,r}^L \end{bmatrix} = e^{-sT} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{2i-1,h}^L \\ \underline{U}_{2i,h}^L \end{bmatrix} \quad (3/1.7)$$

annimmt.

Für die Gesamtheit aller Elementarleitungen gilt somit

$$\underline{U}_{Mr}^L = e^{-sT} \underline{K} \underline{U}_{Mh}^L \quad (3/1.8)$$

wobei zur Abkürzung der Schreibweise die Kommutierungsmatrix $\underline{K}$ verwendet wird. Sie hat die Gestalt:

Ganz entsprechend der Zusammenfassung der Leitungswellen zu den Vektoren $\underline{U}_{Mh}^L$ und $\underline{U}_{Mr}^L$ lassen sich auch sämtliche hin- und rücklaufenden Wellen für die Stoßstellen zu den Vektoren $\underline{U}_{Mh}^S$ und $\underline{U}_{Mr}^S$ zusammenfassen und den drei Arten der Toranschlußleitungen gemäß gruppieren:

$$\underline{U}_{Mh,r}^S = \begin{bmatrix} \underline{U}_{Nh,r}^S \\ \underline{U}_{Ph,r}^S \\ \underline{U}_{Qh,r}^S \end{bmatrix} . \quad (3/1.12)$$

Andererseits ist eine Unterteilung der Vektoren $\underline{U}_{Mh}^S$ und $\underline{U}_{Mr}^S$ in je s' Untervektoren sinnvoll, wobei der j-te Teilvektor $\underline{U}_{jr}^S$ des Vektors $\underline{U}_{Mr}^S$ mit dem j-ten Teilvektor $\underline{U}_{jh}^S$ des Vektors $\underline{U}_{Mh}^S$ über die Streumatrix $\underline{S}_{jj}$ der j-ten Stoßstelle verknüpft ist:

$$\underline{U}_{jr}^S = \underline{S}_{jj} \underline{U}_{jh}^S . \quad (3/1.13)$$

Die Verallgemeinerung der für die Teilvektoren $\underline{U}_{jh,r}^S$ geltenden Gl.(3/1.13) für die Gesamtvektoren lautet

$$\underline{U}_{Mr}^S = \underline{\Sigma} \underline{U}_{Mh}^S , \quad (3/1.14)$$

wobei die M-zeilige, quadratische Matrix $\underline{\Sigma}$ als verallgemeinerte Streumatrix der Gesamtheit aller Stoßstellen des Netzwerks aufgefaßt werden kann.

Setzt man in Gl.(3/1.14) die Gl.(3/1.12) ein, so ergibt sich die der Gl.(2/3.18) analoge Form

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{Nr}^S \\ \underline{U}_{Pr}^S \\ \underline{U}_{Qr}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{NN} & \underline{S}_{NP} & \underline{S}_{NQ} \\ \underline{S}_{PN} & \underline{S}_{PP} & \underline{S}_{PQ} \\ \underline{S}_{QN} & \underline{S}_{QP} & \underline{S}_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{Nh}^S \\ \underline{U}_{Ph}^S \\ \underline{U}_{Qh}^S \end{bmatrix} . \quad (3/1.15)$$

Entsprechend der durch Gl.(2/3.18) beschriebenen Aufteilung der Streumatrix einer einzelnen Stoßstelle gibt Gl.(3/1.15) die Aufteilung der verallgemeinerten Streumatrix $\underline{S}$ für die Gesamtheit aller Stoßstellen an. In den beiden Gleichungen entsprechen sich die klein und groß geschriebenen Buchstaben für die Indizierung der Teilmatrizen.

Im Betriebsfall sind an der Torgruppe P keine hinlaufenden Wellen für die Stoßstellen möglich: der Vektor $\underline{U}_{Ph}^S$ ist komponentenweise Null. Von Gl.(3/1.15) interessiert daher nur die der Gl.(2/3.19) entsprechende reduzierte Form

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{Nr}^S \\ \underline{U}_{Pr}^S \\ \underline{U}_{Qr}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{NN} & \underline{S}_{NQ} \\ \underline{S}_{PN} & \underline{S}_{PQ} \\ \underline{S}_{QN} & \underline{S}_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{Nh}^S \\ \underline{U}_{Qh}^S \end{bmatrix} . \quad (3/1.16)$$

Für die Untermatrizen in Gl.(3/1.16) gelten sinngemäß die Erläuterungen zu den entsprechenden Untermatrizen in Gl.(2/3.19).

Das zu Gl.(3/1.15) gehörende Vektorflußdiagramm zeigt Bild 3/4. Dabei gehört der voll ausgezogene Teil des Diagramms zur Untergleichung Gl.(3/1.16); die von dem nicht interessierenden Vektor $\underline{U}_{Ph}$ ausgehenden Zweige sind gestrichelt gezeichnet und werden für die weitere Betrachtung nicht mehr berücksichtigt.

Da die rücklaufenden Wellen auf den Leitungen gleich den hinlaufenden Wellen für die Stoßstellen sind und die rücklaufenden Wellen von den Stoßstellen die hinlaufenden Wellen für die Leitungen bilden, ergeben sich die allgemeinen Verknüpfungsgleichungen

$$\underline{U}_{Mr}^L = \underline{U}_{Mh}^S , \quad (3/1.17a)$$

$$\underline{U}_{Mh}^L = \underline{U}_{Mr}^S . \quad (3/1.17b)$$

Wegen der ausgangsseitigen Anpassung der Leitungen in den wellenmäßigen Ersatzbildern sind, mit Ausnahme der eingepprägten Quellwellen, die dort vorhandenen Wellen ohne Rückwirkung auf das Gesamtnetzwerk. Von den allgemeinen Verknüpfungsgleichungen interessieren daher nur die Untergleichungen für die Torgruppe N, nämlich

$$\underline{U}_{Nr}^L = \underline{U}_{Nh}^S, \quad (3/1.18a)$$

$$\underline{U}_{Nh}^L = \underline{U}_{Nr}^S. \quad (3/1.18b)$$

Über die in Gl.(3/1.18) ausgesprochene Identität ergibt sich die noch fehlende Verbindung der Teildiagramme zu dem gesuchten Vektorflußdiagramm für das Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke (s.Bild 3/4).

Das gefundene Vektorflußdiagramm repräsentiert ein System linearer Matrizengleichungen, das auf eine Beschreibung der Leitungsnetzwerke durch Zustandsgleichungen hinführt. Von den verschiedenen Schreibweisen, in denen das Gleichungssystem angegeben werden kann, interessiert im folgenden die Form

$$\underline{U}_{Nr}^L(s) = e^{-sT} \left(\underline{K}_{SN} \underline{U}_{Nr}^L(s) + \underline{K}_{SQ} \underline{U}_{Qh}^S(s) \right), \quad (3/1.19)$$

$$\underline{U}_{Pr}^L(s) = \underline{S}_{PN} \underline{U}_{Nr}^L(s) + \underline{S}_{PQ} \underline{U}_{Qh}^S(s), \quad (3/1.20a)$$

$$\underline{U}_{Qr}^L(s) = \underline{S}_{QN} \underline{U}_{Nr}^L(s) + \underline{S}_{QQ} \underline{U}_{Qh}^S(s). \quad (3/1.20b)$$

Abschließend sollen einige in diesem Abschnitt eingeführten Symbole in ihrer speziellen Bedeutung für das in Bild 2/6 eingeführte Schaltbeispiel erläutert werden.

Zur Veranschaulichung dient dabei der in Bild 3/5 dargestellte Signalflußgraph, der sich auf die in Bild 2/12 gezeigte modifizierte Form der Schaltung bezieht. Da in dem allgemeinen Vektorflußdiagramm für das Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke die Teilsignalflußgraphen für die Ersatzleitungen der modifizierten Form überhaupt nicht

auftreten, der verwendete Signalflußgraph aber später andererseits zur vollständigen Beschreibung der modifizierten Form dienen soll, sind die entsprechenden Teilzweige lediglich angedeutet.

Für die modifizierte Form der Schaltung gilt $n'=2$, $p'=1$, $q'=1$ und mit Gl.(3/1.14) $m'=4$. Aus Gl.(3/1.5) folgt $M=8$, $N=4$, $P=2$, $Q=2$. Gl.(3/1.6) bzw. Gl.(3/1.12) lauten in vereinfachter Schreibweise (ohne die Indizes L, S, h, r)

$$\underline{U}_M = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix}, \quad (3/1.21a)$$

wobei die Untervektoren

$$\underline{U}_N = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_P = \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{U}_Q = \begin{bmatrix} U_7 \\ U_8 \end{bmatrix} \quad (3/1.21b,c,d)$$

zu unterscheiden sind.

Mit Hilfe des Signalflußgraphen aus Bild 3/5 läßt sich unmittelbar die in Gl.(3/1.14) eingeführte Streumatrix ablesen. Die in Gl.(3/1.15) vorkommenden Untermatrizen $\underline{S}_{NN}$, $\underline{S}_{NP}, \dots, \underline{S}_{QQ}$ ergeben sich dann durch entsprechende Portionierung.

3.2 Beschreibung durch Zustandsgleichungen

3.2.1 Zustandskonzept bei linearen, diskreten Systemen

In den folgenden Abschnitten wird die Theorie der Zustandsvariablen linearer, diskreter Systeme auf die hier betrachteten Leitungsnetzwerke angewandt. Dabei ergeben sich Beziehungen für das Zeit- und Frequenzverhalten, die unmittelbar an die Ergebnisse der allgemeinen Theorie anknüpfen. Einige für diese Arbeit wesentliche Aussagen der allgemeinen Theorie, die z.B. in (3/10,11) ausführlich erläutert wird, sollen hier kurz skizziert werden.

Es wird ein lineares, diskretes System mit zeitunabhängigen Eigenschaften betrachtet, in dem sich die Signale nur zu den Zeitpunkten kT ($k=0,1,2,\dots$) ändern können bzw. nur zu diesen Zeitpunkten betrachtet werden. Zu seiner vollständigen Beschreibung benötigt man zwei Gleichungssysteme, nämlich die beiden Zustandsgleichungen

$$\underline{x}(k+1)T = \underline{A} \underline{x}(kT) + \underline{B} \underline{u}(kT) \quad (3/2.1a)$$

und

$$\underline{y}(kT) = \underline{C} \underline{x}(kT) + \underline{D} \underline{u}(kT) . \quad (3/2.1b)$$

Der Zustandsvektor $\underline{x}$, der Eingangsvektor $\underline{u}$ und der Ausgangsvektor $\underline{y}$ sind miteinander über die Systemmatrix $\underline{A}$, die Eingangsmatrix $\underline{B}$, die Ausgangsmatrix $\underline{C}$ und die Einflußmatrix $\underline{D}$ verknüpft; eine symbolische Darstellung der Zustandsgleichungen in einem verallgemeinerten Blockschaltbild zeigt Bild 3/6.

Als Übergangsmatrix wird die Matrix

$$\underline{\phi}(k) = \underline{A}^k \quad (3/2.2)$$

bezeichnet.

Mit ihr lautet die Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich

$$\underline{x}(kT) = \underline{\phi}(k)\underline{x}(0) + \sum_{n=0}^{k-1} \underline{\phi}(k-1-n)\underline{B}\underline{u}(nT), \quad (3/2.3a)$$

$$\underline{y}(kT) = \underline{C} \underline{\phi}(k)\underline{x}(0) + \sum_{n=0}^{k-1} \underline{\phi}(k-1-n)\underline{B}\underline{u}(nT) + \underline{D}\underline{u}(kT). \quad (3/2.3b)$$

Durch z-Transformation⁺ der Zustandsgleichungen erhält man das in Bild 3/7 durch ein Vektorflußdiagramm symbolisch dargestellte Gleichungssystem

$$z\underline{X}_{*}(z) - z\underline{x}(0) = \underline{A}\underline{X}_{*}(z) + \underline{B}\underline{U}_{*}(z), \quad (3/2.4a)$$

$$\underline{Y}_{*}(z) = \underline{C}\underline{X}_{*}(z) + \underline{D}\underline{U}_{*}(z). \quad (3/2.4b)$$

⁺

Die Laplace-Transformierte einer Zeitfunktion $f(t)$ wird mit

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

die der abgetasteten Funktion

$$f_{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta_0(t-kT)$$

mit

$$F_{*}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}f(kT)$$

bezeichnet. Die z-Transformierte der Zeitfunktion $f(t)$, die durch ihre Abtastwerte

$$f(kT) = f_k$$

repräsentiert wird, ist

$$F_{*}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

wobei $F_{*}(z)$ durch die Substitution $z=e^{sT}$ aus $F_{*}(s)$ hervorgeht.

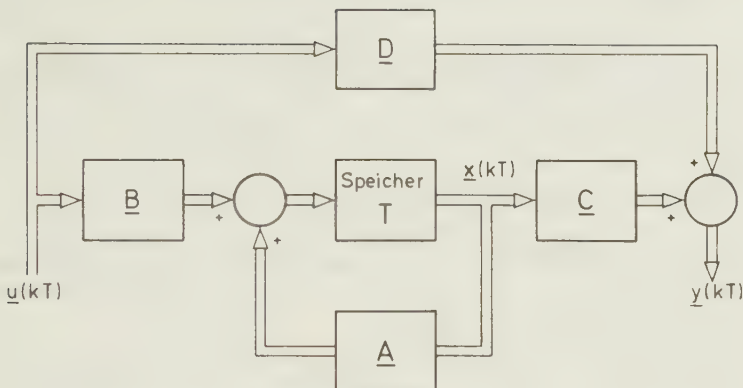


Bild 3/6: Verallgemeinertes Blockschaltbild der Zustands-
gleichungen linearer, diskreter, zeitinvarianter
Systeme

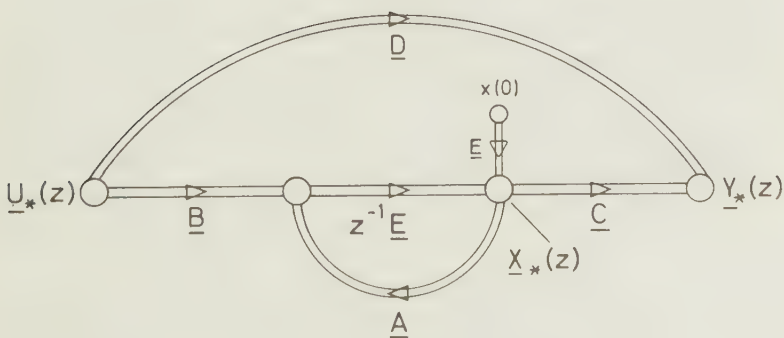


Bild 3/7: Vektorflußdiagramm der z-transformierten Zustands-
gleichung aus Bild 3/6

Gl.(3/2.4) führt auf die Lösung der Zustandsgleichungen im Frequenzbereich:

$$\underline{X}_{*}(z) = (z\underline{E}-\underline{A})^{-1} z\underline{x}(0) + (z\underline{E}-\underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{U}_{*}(z) , \quad (3/2.5a)$$

$$\underline{Y}_{*}(z) = \underline{C}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1} z\underline{x}(0) + \left(\underline{C}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \right) \underline{U}_{*}(z) . \quad (3/2.5b)$$

Für verschwindende Anfangswerte $\underline{x}(0)=\underline{0}$ ergibt sich

$$\underline{X}_{*}(z) = (z\underline{E}-\underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{U}_{*}(z) , \quad (3/2.6a)$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{*}(z) &= \left(\underline{C}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \right) \underline{U}_{*}(z) , \\ &= \underline{H}_{*}(z) \underline{U}_{*}(z) . \end{aligned} \quad (3/2.6b)$$

Das Element $H_{*ij}(z)$ der Übertragungsmatrix

$$\underline{H}_{*}(z) = \underline{C}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (3/2.7)$$

ist die Übertragungsfunktion vom Eingang j zum Ausgang i :

$$H_{*ij}(z) = \frac{Y_{*i}(z)}{U_{*j}(z)} ; U_{*v}(z)=0 \text{ für } v \neq j . \quad (3/2.8)$$

Die beliebige Übertragungsfunktion $H_{*ij}(z)$, für die im folgenden vereinfachend $H_{*}(z)$ geschrieben wird, kann dargestellt werden in den Formen

$$H_{*}(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} z^{\nu}} \quad (3/2.9a)$$

und

$$H_{*}(z) = \frac{b_m}{c_m} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (z - z_{\infty\nu})} . \quad (3/2.9b)$$

Es ist $n \geq m$, wobei n den Rang der Systemmatrix $\underline{A}$ angibt; $H_*(z)$ ist eine reelle Funktion.

Aus der Potenzreihenentwicklung der Übertragungsfunktion

$$H_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (3/2.10a)$$

ergibt sich durch die Rücksubstitution $z = e^{sT}$ für $s = j\omega$ eine Reihendarstellung

$$H_*(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-jk\omega T} \quad (3/2.10b)$$

des in $2\pi/T$ periodischen Frequenzgangs $H_*(\omega)$. Die Koeffizienten $h(kT)$ der zugehörigen Impulsantwort

$$h_*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) \delta_0(t - kT) \quad (3/2.11)$$

stimmen mit den Koeffizienten h_k überein:

$$h_k = h(kT) . \quad (3/2.12)$$

Außer über den Weg der Potenzreihenentwicklung läßt sich die Rücktransformation in den Zeitbereich noch durch Lösung des komplexen Umkehrintegrals der z -Transformation oder über eine Partialbruchentwicklung erreichen, doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

3.2.2 Wellen als Zustandsvariable

Im verallgemeinerten Blockschaltbild (s. Bild 3/6) für die symbolische Darstellung der Zustandsgleichungen sind die Zustandsvariablen den Ausgängen der Verzögerungsglieder zugeordnet; der Zustand zur Zeit $(k+1)T$ ist durch die Werte der Eingangsgrößen der Verzögerungsglieder zur Zeit kT festgelegt. Die Verzögerungsglieder sind die Speicher der diskreten Systeme; ihre Art und ihre Verknüpfung bestimmt wesentlich die Operation, der die Eingangssignale des Systems unterliegen.

Für die verschiedenen diskreten Systeme gibt es unterschiedliche Speicherrealisierungen, z.B. Abtasthalteglieder bei Digitalen Filtern oder Schieberegister bei sequentiellen Netzwerken. Auf die Verwendung von Leitungen als Speicher für Abtastnetzwerke hat P.M. Lewis in (3/12) hingewiesen. Auf der Suche nach Abtastnetzwerken mit passiven, aber nicht notwendigerweise konzentrierten Elementen kommt er zu Schaltungen aus reellen Widerständen und idealen kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Doppelleitungen gleicher Länge, d.h. zu Netzwerken, die zu der in dieser Arbeit betrachteten Klasse gehören. Da das Netzwerk dispersionsfrei ist, und die von ihm betrachteten Leitungen für eine Richtung die Laufzeit $T/2$ besitzen und so die angelegten Impulse gerade um den Takt T verzögern, bleibt der diskrete Charakter der dem Netzwerk im Takt T angebotenen Impulse erhalten. Der Eingang einer kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Leitung ist zugleich der Ein- und Ausgang des Speichers, an dem die Impulse miteinander verknüpft werden. Dabei bilden die in eine Leitung hinlaufende Welle die Eingangsgröße und die rücklaufende Welle die Ausgangsgröße des Speichers.

Bei der allgemeinen Behandlung der Elementarleitung als Speicher sind aber die beiden Tore gleichermaßen als Ein- und Ausgänge zu berücksichtigen. Eine Welle, die an einem Tor eintritt, erscheint nach der Verzögerungszeit T als rücklaufende Welle am anderen Tor und umgekehrt. In der

Elementarleitung, die zur Verdeutlichung in Bild 3/8 zusammen mit ihrem zugehörigen Signalflußgraphen dargestellt ist, sind also unabhängig voneinander zwei getrennte Speicher vereinigt, wie besonders aus der Struktur des Signalflußgraphen deutlich wird. Nur in dem Fall, wenn das eine Ende der Leitung auf eine eintorige Stoßstelle führt, ist über deren Reflexionsfaktor eine feste Kopplung zwischen dem Ausgang des einen und dem Eingang des anderen Speichers gegeben, so daß beide Speicher gemeinsam wie einer mit der doppelten Speicherzeit wirken.

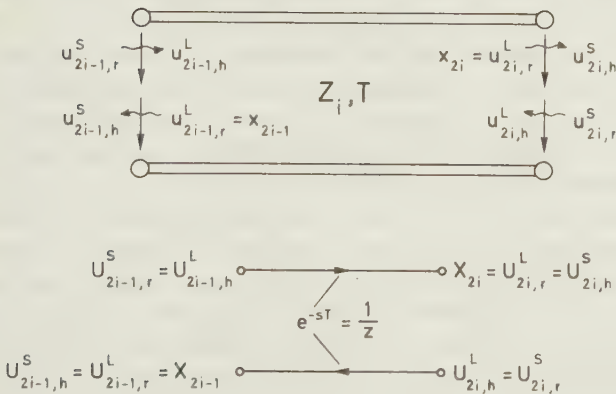


Bild 3/8: Zur Definition der Zustandsvariablen bei der Elementarleitung

Da in dem erläuterten Zustandskonzept die Zustandsvariablen den Ausgangsgrößen der Speicher zugeordnet sind, ergibt die Übertragung des Konzeptes auf die Beschreibung von Elementarleitungen folgende Definition der Zustandsvariablen: Die Zustandsvariablen der Elementarleitung sind die an ihren Toren

zu den diskreten Zeitpunkten kT betrachteten rücklaufenden Leitungswellen bzw. die auf die angrenzenden Stoßstellen hinlaufenden Spannungswellen; die i -te Elementarleitung wird dabei durch die beiden Zustandsvariablen

$$x_{2i-1}(t) = u_{2i-1,r}^L(t) = u_{2i-1,h}^S(t) \quad (3/2.13a)$$

und

$$x_{2i}(t) = u_{2i,r}^L(t) = u_{2i,h}^S(t) \quad (3/2.13b)$$

gekennzeichnet. Die Beziehungen von Gl.(3/2.13) sind in Bild 3/8 näher erläutert.

Da das Grundmodell der hier betrachteten Leitungsnetzwerke außer den Elementarleitungen keine anderen Speichertypen enthält und die zugelassenen Netzwerkelemente linear und zeitinvariant sind, kann das Zustandskonzept linearer diskreter Systeme mit zeitunabhängigen Eigenschaften uneingeschränkt zur Beschreibung des Grundmodells herangezogen werden. Diese Beschreibungsmöglichkeit hat den Vorteil, daß die Methoden und Ergebnisse der Theorie der Zustandsvariablen zur Untersuchung der Eigenschaften der betrachteten Netzwerke benutzt werden können.

Nachdem nun geklärt ist, welche Größen bei einer Elementarleitung als Zustandsvariable in Frage kommen, muß nun noch der Aufbau des Zustandsvektors für das gesamte Leitungsnetzwerk festgelegt werden. Dabei ist zu beachten, daß durch die wellenmäßige Darstellung von Widerständen und Quellen die Anzahl der Elementarleitungen des Grundmodells willkürlich erhöht werden kann, ohne daß sich das Systemverhalten ändert. Der Zustand des Systems ist also nur durch die Wellen auf den ursprünglichen, tatsächlich gegebenen Elementarleitungen (Gruppe N) gekennzeichnet; für den Zustandsvektor ergibt sich demnach

$$\underline{x}(t) = \underline{u}_{Nr}^L(t) = \underline{u}_{Nh}^S(t) \quad (3/2.14)$$

Dem Zustandsvektor $\underline{x}$ entsprechend, dessen Elemente die Ausgangsgrößen der Speicher sind, läßt sich ein Hilfsvektor $\underline{\tilde{x}}$ definieren, der aus den zugehörigen Eingangsgrößen aufgebaut ist. Für die kontinuierlichen Leitungsspeicher besteht die Beziehung

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \underline{x}(t+T), \quad (3/2.15)$$

die bei der Anwendung des Zustandskonzeptes diskreter Systeme speziell für die Zeitpunkte $t=kT$ ausgenutzt wird. Der Hilfsvektor $\underline{\tilde{x}}(t)$ steht mit den Spannungswellen des Leitungsnetzwerks in der Beziehung

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \underline{K} \underline{u}_{Nh}^L(t) = \underline{K} \underline{u}_{Nr}^S(t), \quad (3/2.16)$$

wie sich durch Rücktransformation der in Gl.(3/1.10) angegebenen Streubeziehung für die Leitungswellen zeigen läßt.

3.2.3 Ermittlung der Zustandsgleichungen

Zur Beschreibung des Grundmodells der betrachteten Leitungsnetzwerke durch Zustandsvariable linearer, diskreter, zeitinvarianter Systeme sind die in Gl.(3/2.1) angegebenen Zustandsgleichungen in ihrer Bedeutung für die vorliegenden Netzwerke zu ermitteln.

Für die Herleitung gehen wir von den in Gl.(3/1.19) und Gl.(3/1.20) angegebenen Beziehungen aus, die aus dem Vektorflußdiagramm des Grundmodells gewonnen wurden. Durch Rücktransformation der gefundenen Gleichungen in den Zeitbereich erhält man

$$\underline{u}_{Nr}^L(t) = \underline{K} \underline{S}_{NN} \underline{u}_{Nr}^L(t-T) + \underline{K} \underline{S}_{NQ} \underline{u}_{Qh}^S(t-T) \quad (3/2.17)$$

bzw.

$$\underline{u}_{Nr}^L(t+T) = \underline{K} \underline{S}_{NN} \underline{u}_{Nr}^L(t) + \underline{K} \underline{S}_{NQ} \underline{u}_{Qh}^S(t) \quad (3/2.18)$$

sowie

$$\underline{u}_{Pr}^S(t) = \underline{S}_{PN} \underline{u}_{Nr}^L(t) + \underline{S}_{PQ} \underline{u}_{Qh}^S(t) \quad (3/2.19a)$$

und

$$\underline{u}_{Qr}^S(t) = \underline{S}_{QN} \underline{u}_{Nr}^L(t) + \underline{S}_{QQ} \underline{u}_{Qh}^S(t) . \quad (3/2.19b)$$

Die in dieser Arbeit verwendete wellenmäÙige Betrachtung faÙt die das Leitungsnetzwerk erregenden Zweipolquellen als Wellenquellen auf, deren eingeprägte Spannungswellen die EingangsgröÙen des Netzwerkes darstellen. Der geordnete und zu den Zeitpunkten $t=kT$ abgefragte Satz dieser EingangsgröÙen bildet den Eingangsvektor für die in Gl.(3/2.1) angegebenen Zustandsgleichungen; für kontinuierlichen Zeitverlauf gilt

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_{Qh}^S(t) . \quad (3/2.20)$$

Das Einsetzen dieser Beziehung und der Gl.(3/2.14) in die Gl.(3/2.18) liefert zunächst

$$\underline{x}(t+T) = \underline{K}_{S-NN} \underline{x}(t) + \underline{K}_{S-NQ} \underline{u}(t) , \quad (3/2.21)$$

woraus sich für die Betrachtung der Zeitpunkte $t=kT$ als erste Zustandsgleichung der Leitungsnetzwerke die Gleichung

$$\underline{x}((k+1)T) = \underline{K}_{S-NN} \underline{x}(kT) + \underline{K}_{S-NQ} \underline{u}(kT) \quad (3/2.22)$$

ergibt, deren Vergleich mit der Schreibweise der in Gl.(3/2.1a) ausgedrückten allgemeinen Form der ersten Zustandsgleichung linearer, diskreter Systeme als Systemmatrix der Leitungsnetzwerke

$$\underline{A} = \underline{K}_{S-NN} \quad (3/2.23)$$

liefert und als Eingangsmatrix

$$\underline{B} = \underline{K}_{S-NQ} . \quad (3/2.24)$$

Während die erste Zustandsgleichung bei gegebenem System und gegebener Erregung für die getroffene Wahl der Zustandsvariablen zwangsläufig festliegt, hängt die zweite Zustandsgleichung

wesentlich davon ab, welche Größen des Systems als Ausgangsgrößen anzusehen sind.

Als Ausgangsgrößen der betrachteten Leitungsnetzwerke kommen zunächst die Spannungen an den Verbraucherwiderständen in Frage; in Anlehnung an die Nomenklatur in Abschnitt 3.1.4 wollen wir Ausgangsgrößen dieser Art mit dem Index P kennzeichnen. Weitere hier noch interessierende Ausgangsgrößen sind die Torspannungen an den Elementarleitungen (Index N) und die sich im Betrieb einstellenden Ausgangsspannungen an den innenwiderstandsbehafteten Zweipolquellen (Index Q). Diese drei Gruppen von Ausgangsgrößen wollen wir, ebenfalls in Anlehnung an Abschnitt 3.1.4, in der Reihenfolge N, P, Q behandeln; die zugehörige zweite Zustandsgleichung lautet formal

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_N(kT) \\ \underline{y}_P(kT) \\ \underline{y}_Q(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_N \\ \underline{C}_P \\ \underline{C}_Q \end{bmatrix} \underline{x}(kT) + \begin{bmatrix} \underline{D}_N \\ \underline{D}_P \\ \underline{D}_Q \end{bmatrix} \underline{u}(kT). \quad (3/2.25)$$

Es besteht nun die Aufgabe, die in Gl.(3/2.25) angegebenen Untermatrizen der Ausgangsmatrix $\underline{C}$ und der Einflußmatrix $\underline{D}$ zu bestimmen.

Für die Torspannungen der Elementarleitungen gilt

$$\underline{y}_N(t) = \underline{u}_{Nh}^L(t) + \underline{u}_{Nr}^L(t). \quad (3/2.26a)$$

Das Einsetzen von Gl.(3/2.14) und Gl.(3/2.16) liefert zunächst

$$\underline{y}_N(t) = \underline{K}\tilde{\underline{x}}(t) + \underline{x}(t); \quad (3/2.26b)$$

mit Hilfe von Gl.(3/2.15) folgt daraus

$$\underline{y}_N(t) = \underline{K}\underline{x}(t+T) + \underline{x}(t), \quad (3/2.26c)$$

und unter Benutzung von Gl.(3/2.21) schließlich

$$\underline{y}_N(t) = (\underline{S}_{NN} + \underline{E})\underline{x}(t) + \underline{S}_{NQ}\underline{u}(t) \quad . \quad (3/2.26d)$$

Für die Zeitpunkte $t=kT$ geht diese Beziehung über in die gesuchte erste Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung; die Untermatrizen der Gruppe N von Gl.(3/2.25) lauten

$$\underline{C}_N = \underline{S}_{NN} + \underline{E} \quad , \quad (3/2.27)$$

$$\underline{D}_N = \underline{S}_{NQ} \quad . \quad (3/2.28)$$

Der sich aus den Verbraucherspannungen aufbauende Teil des Ausgangsvektors ergibt sich direkt aus Gl.(3/2.19a) unter Berücksichtigung von Gl.(3/2.14) und (3/2.20):

$$\underline{y}_P(t) = \underline{u}_{Pr}^S(t) = \underline{S}_{PN}\underline{x}(t) + \underline{S}_{PQ}\underline{u}(t) \quad . \quad (3/2.29)$$

Für die Zeitpunkte $t=kT$ folgt aus dieser Beziehung die zweite Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung mit den Untermatrizen

$$\underline{C}_P = \underline{S}_{PN} \quad (3/2.30)$$

und

$$\underline{D}_P = \underline{S}_{PQ} \quad . \quad (3/2.31)$$

Die Ausgangsspannungen der innenwiderstandsbehafteten Zweipolquellen lassen sich aus Gl.(3/2.19b), Gl.(3/2.14) und Gl.(3/2.20) ermitteln:

$$\underline{y}_Q(t) = \underline{u}_Q(t) = \underline{u}_{Qr}^S(t) + \underline{u}_{Qh}^S(t) \quad , \quad (3/2.32a)$$

$$= \underline{S}_{QN}\underline{x}(t) + (\underline{S}_{QQ} + \underline{E})\underline{u}(t) \quad . \quad (3/2.32b)$$

Die dritte und letzte Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung folgt hieraus durch Betrachtung der Zeitpunkte $t=kT$;

die noch fehlenden Untermatrizen sind

$$\underline{C}_Q = \underline{S}_{QN} \quad (3/2.33)$$

und

$$\underline{D}_Q = \underline{S}_{QQ} + \underline{E}. \quad (3/2.34)$$

Zur Erleichterung des Vergleichs zwischen der allgemeinen Form der beiden Zustandsgleichungen und der speziellen Form für die hier betrachteten Leitungsnetzwerke werden die entsprechenden Gleichungen noch einmal, und zwar zusammen angegeben:

$$\underline{x}((k+1)T) = \underline{A}\underline{x}(kT) + \underline{B}\underline{u}(kT) ,$$

$$\underline{x}((k+1)T) = \underline{K}\underline{S}_{NN}\underline{x}(kT) + \underline{K}\underline{S}_{NQ}\underline{u}(kT) ;$$

$$\underline{y}(kT) = \underline{C}\underline{x}(kT) + \underline{D}\underline{u}(kT) ,$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_N(kT) \\ \underline{y}_P(kT) \\ \underline{y}_Q(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{NN} + \underline{E} \\ \underline{S}_{PN} \\ \underline{S}_{QN} \end{bmatrix} \underline{x}(kT) + \begin{bmatrix} \underline{S}_{NQ} \\ \underline{S}_{PQ} \\ \underline{S}_{QQ} + \underline{E} \end{bmatrix} \underline{u}(kT). \quad (3/2.35)$$

Als Anwendungsbeispiel sollen im folgenden die Zustandsgleichungen für die in Bild 2/6 eingeführte Leitungsschaltung bestimmt werden. Die Kennzeichnung der vorkommenden Größen richtet sich dabei wie auch schon früher bei den Ausführungen zu Gl.(3/1.21) nach der in Bild 2/12 verwendeten Bezeichnungsweise für die modifizierte Struktur.

Die Zusammenhänge werden an Hand des in Bild 3/9 gezeigten Signalflußgraphen verbildlicht. Der verwendete Signalflußgraph beruht auf dem in Bild 3/5 dargestellten Graphen und enthält außer den zusätzlichen Zweigen zur Bestimmung der Torspannungen eine Bezifferung der interessierenden Knoten mit den Variablen der Zustandsgleichungen im z-Bereich.

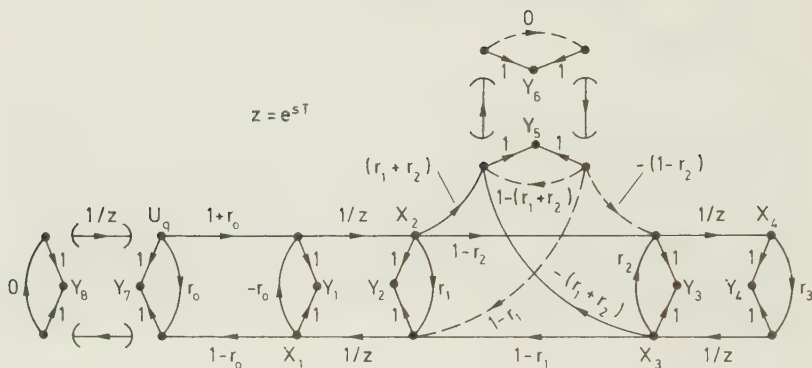


Bild 3/5: Ergänzter Signalflußgraph des begleitenden Beispiels

Der in Gl.(3/2.14) definierte Zustandsvektor baut sich aus den rücklaufenden Leitungswellen der ursprünglichen Elementarleitungen L_1 und L_2 auf; mit Gl.(3/1.21b) folgt:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1r}^L \\ u_{2r}^L \\ u_{3r}^L \\ u_{4r}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1h}^S \\ u_{2h}^S \\ u_{3h}^S \\ u_{4h}^S \end{bmatrix} .$$

Die eingepprägten Wellen an den Toren der Ersatzleitung der Wellenquellen bilden die Elemente des in Gl.(3/2.20) angegebenen Eingangsvektors. Gemäß Gl.(3/1.21d) ist

$$\underline{u}_{Qh}^S = \begin{bmatrix} u_{7h}^S \\ u_{8h}^S \end{bmatrix} ,$$

wobei u_{7h}^S gleich der eingepprägten Quellwelle u_q ist und u_{8h}^S keinen eingepprägten Anteil enthält.

Somit lautet der Eingangsvektor

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der in Gl.(3/1.21e) angegebenen partitionierten Form der Matrix $\underline{S}$ lassen sich die in Gl.(3/2.23) angegebene Systemmatrix $\underline{A} = \underline{KS}_{NN}$ und die in Gl.(3/2.23) angegebene Eingangsmatrix $\underline{B} = \underline{KS}_{NQ}$ der ersten Zustandsgleichung ermitteln. Die erste Zustandsgleichung lautet in der allgemeinen, durch Gl.(3/2.1a) beschriebenen Form und in der für das Beispiel interessierenden expliziten Form

$$\begin{aligned} \underline{x}((k+1)T) &= \underline{Ax}(kT) + \underline{Bu}(kT), \\ \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \\ x_3((k+1)T) \\ x_4((k+1)T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & r_1 & 1-r_1 & 0 \\ -r_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 1-r_2 & r_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+r_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_q(kT) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3/2.36)

Wir wenden uns nun der Bestimmung der durch Gl.(3/2.1b) gekennzeichneten zweiten Zustandsgleichung zu. Die interessierende ausführliche Form in Gl.(3/2.25) bzw. Gl.(3/2.35) wird für die Gruppen N, P und Q getrennt hergeleitet.

Die zur Gruppe N gehörenden Torspannungen der ursprünglichen Elementarleitungen bilden die Elemente des Teilausgangsvektors y_N . Mit Gl.(3/2.21b) gilt

$$y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.$$

Aus der partionierten Form der Matrix $\underline{\Sigma}$ lassen sich die in Gl.(3/2.27) und Gl.(3/2.28) aufgeführten Matrizen $\underline{C}_N = \underline{S}_{NN} + \underline{E}$ und $\underline{D}_N = \underline{S}_{NQ}$ gewinnen, die erste Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung lautet in allgemeiner und in spezieller, ausführlicher Form:

$$\underline{y}_N(kT) = \underline{C}_N \underline{x}(kT) + \underline{D}_N u(kT),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ y_3(kT) \\ y_4(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r_1 & 1-r_1 & 0 \\ 0 & 1-r_2 & 1+r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+r_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_q(kT) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3/2.37a)

Die Matrix $\underline{D}_N$ zeigt, daß nur die Größe $y_1 = u_1$ auch direkt von der Quelle abhängt.

Die Ausgangsgrößen der Gruppe P sind die Torspannungen der Ersatzleitung L_3 (siehe auch Gl.(3/1.21c). Von Interesse ist die gesuchte Widerstandsspannung u_5 , während die Spannung u_6 nur eine formale Rechengröße ist:

$$\underline{y}_P = \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}.$$

Die durch Gl.(3/2.30) und Gl.(3/2.31) gegebenen Matrizen $\underline{C}_P = \underline{S}_{PN}$ und $\underline{D}_P = \underline{S}_{PQ}$ sind Untermatrizen der Matrix $\underline{\Sigma}$; die zweite Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung läßt sich also unmittelbar hinschreiben. Sie lautet in allgemeiner und in expliziter Form für das behandelte Beispiel:

$$\underline{y}_P(kT) = \underline{C}_P \underline{x}(kT) + \underline{D}_P u(kT),$$

$$\begin{bmatrix} y_5(kT) \\ y_6(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_1+r_2 & -(r_1+r_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_q(kT) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3/2.37b)

Die Untermatrix $\underline{D}_P$ der Einflußmatrix $\underline{D}$ ist eine Nullmatrix, da die Ausgangsgrößen nicht direkt von der Quelle abhängen. Die für das ursprüngliche Netzwerk bedeutungslose Rechengröße y_6 nimmt ebenfalls den Wert Null an.

Zur noch fehlenden Gruppe Q gehören die Torspannungen u_7 und u_8 der Ersatzleitung L_4 der Wellenquelle. Dabei ist die Spannung u_7 die gesuchte Klemmenspannung der Quelle und die Spannung u_8 eine formale Rechengröße. Der Ausgangsvektor lautet unter Benutzung von Gl.(3/2.21d)

$$\underline{y}_Q = \begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Nach Gl.(3/2.33) und Gl.(3/2.34) gilt $\underline{C}_Q = \underline{S}_{QN}$ und $\underline{D}_Q = \underline{S}_{QQ} + \underline{E}$. Die interessierenden Matrizen werden wiederum mit Hilfe der partitionierten Matrix $\underline{S}$ bestimmt. Für die noch fehlende dritte Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung lautet der Vergleich zwischen der allgemeinen und der für das Beispiel geltenden Form:

$$\underline{y}_Q(kT) = \underline{C}_Q \underline{x}(kT) + \underline{D}_Q \underline{u}(kT),$$

$$\begin{bmatrix} y_7(kT) \\ y_8(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+r_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_q(kT) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3/2.37c)

Für die formale Rechengröße y_8 ergibt sich ebenfalls wie bei der Gruppe P der Wert Null. Die Ausgangsgröße y_7 ist gleich der früher bestimmten Ausgangsgröße y_1 , da in dem behandelten Beispiel die Klemmenspannung der Quelle zugleich Torspannung an einer ursprünglichen Elementarleitung ist.

Durch den in Bild 3/9 gezeigten Signalflußgraphen sind zugleich die in den z-Bereich transformierten Zustandsgleichungen des behandelten Beispiels in verkoppelter Form

dargestellt. Durch Betrachtung geeigneter Teilstrukturen des Graphen lassen sich die ermittelten Zustandsgleichungen auf leichte Weise überprüfen.

3.2.4 Modifikation der Zustandsgleichungen

In Hinblick auf eine automatische Aufstellung und Auswertung der Zustandsgleichungen für die betrachteten Leitungsnetzwerke kann die Vielzahl der aufzustellenden Matrizen als nachteilig bewertet werden, besonders was die zweite Zustandsgleichung angeht.

Bei der Herleitung der Untergleichung der zweiten Zustandsgleichung für die Bestimmung der Torspannungen an den ursprünglichen Elementarleitungen erhielten wir als Zwischenergebnis die in Gl.(3/2.26c) formulierte Beziehung

$$\underline{y}_N(t) = \underline{K}\underline{x}(t+T) + \underline{x}(t) .$$

Mit Hilfe dieser Vorschrift ist es offenbar möglich, die interessierenden Torspannungen allein aus dem Zustandsvektor $\underline{x}$ zu errechnen, der zu den Zeiten t und $t+T$ bekannt sein muß. Da bei der Bestimmung des Zeitvorgangs der Zustandsvektor sowieso fortlaufend neu errechnet wird, bedeutet die Anwendung der obigen Beziehung eine beträchtliche Verringerung des rechnerischen Aufwands (die Linksmultiplikation mit $\underline{K}$ bewirkt lediglich die paarweise Vertauschung von Zeilen).

Die Ausführungen zur modifizierten Netzwerkstruktur zeigten, daß sich durch die wellenmäßige Ersetzung von Quellen und Widerständen alle interessierenden Ausgangsgrößen als Torspannungen von Elementarleitungen darstellen lassen. Wird nun der Zustandsvektor $\underline{x}$ dahingehend erweitert, daß alle rücklaufenden Leitungswellen berücksichtigt werden, so läßt sich für die Berechnung sämtlicher Ausgangsgrößen die zweite Zustandsgleichung durch die Anwendung einer der obigen Beziehung ähnelnden Vorschrift gänzlich umgehen.

In Analogie zur Gl.(3/2.14) definieren wir einen Variablenvektor

$$\underline{v}(t) = \underline{u}_{Mr}^L(t) = \underline{u}_{Mh}^S(t) \quad . \quad (3/2.38)$$

In Erweiterung von Gl.(3/2.20) wird ein neuer Eingangsvektor

$$\underline{v}'(t) = \underline{u}_{Mr}^{L'}(t) = \underline{u}_{Mh}^{S'}(t) \quad (3/2.39)$$

eingeführt, dessen Elemente die eingepprägten Anteile $\underline{u}_{Mr}^{L'}$ und $\underline{u}_{Mh}^{S'}$ der Wellen $\underline{u}_{Mr}^L$ und $\underline{u}_{Mh}^L$ sind. Die Bezeichnungsweise steht dabei in Beziehung zur Nomenklatur des durch Gl.(3/1.1) beschriebenen Signalflußgraphen: jeder abhängigen Variablen V_i des Graphen wird formal ein externer Quellknoten V_i' zugeordnet. Bei dem hier vorliegenden Netzwerk ist der Vektor $\underline{v}'$ komponentenweise bis auf diejenigen Elemente Null, die eine tatsächliche Quellwelle beschreiben.

Mit Hilfe der in Gl.(3/1.8) angegebenen Streubeziehung für die Gesamtheit aller Elementarleitungen gilt für die rücklaufenden Leitungswellen unter Berücksichtigung der eingepprägten Quellwellen

$$\underline{u}_{Mr}^L(t) = \underline{K} \underline{u}_{Mh}^L(t-T) + \underline{u}_{Mr}^{L'}(t) \quad . \quad (3/2.40)$$

Die in Gl.(3/1.14) angegebene Streubeziehung für die Gesamtheit aller Stoßstellen hat im Zeitbereich wegen der Frequenzunabhängigkeit der verallgemeinerten Streumatrix $\underline{\Sigma}$ die Form

$$\underline{u}_{Mr}^S(t) = \underline{\Sigma} \underline{u}_{Mh}^S(t) \quad . \quad (3/2.41)$$

Über die allgemeinen, in Gl.(3/1.17) ausgedrückten Verknüpfungsgleichungen, die im Zeitbereich die Gestalt

$$\underline{u}_{Mr}^L(t) = \underline{u}_{Mh}^S(t), \quad (3/2.42a)$$

$$\underline{u}_{Mh}^L(t) = \underline{u}_{Mr}^S(t) \quad (3/2.42b)$$

besitzen, ergibt sich aus Gl.(3/2.40) und Gl.(3/2.41)

die Beziehung

$$\underline{u}_{Mr}^L(t) = \underline{K} \underline{\Sigma} \underline{u}_{Mr}^L(t-T) + \underline{u}_{Mr}^{L'}(t) \quad , \quad (3/2.43)$$

aus der sich unter Benutzung von Gl.(3/2.38) und Gl.(3/2.39) die der ersten Zustandsgleichung entsprechende Gleichung

$$\underline{v}(t+T) = \underline{K} \underline{\Sigma} \underline{v}(t) + \underline{v}'(t+T) \quad (3/2.44)$$

ergibt.

Die Ausgangsgrößen $\underline{v}$ sind die Torspannungen an den Elementarleitungen:

$$\underline{v}(t) = \underline{u}_M(t) = \underline{u}_{Mr}^L(t) + \underline{u}_{Mn}^L(t) \quad . \quad (3/2.45a)$$

Für sie ergibt sich mit Gl.(3/2.38) bis (3/2.44) ein der zweiten Zustandsgleichung entsprechender Ausdruck

$$\underline{v}(t) = (\underline{\Sigma} + \underline{E}) \underline{v}(t) \quad , \quad (3/2.45b)$$

bzw. die der Gl.(3/2.26c) ähnelnde Form

$$\underline{v}(t) = \underline{K} (\underline{v}(t+T) - \underline{v}'(t+T)) + \underline{v}(t) \quad . \quad (3/2.45c)$$

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Formeln zur Bestimmung des Verhaltens von Leitungsnetzwerken haben im Gegensatz zu den im vorhergehenden Abschnitt zwei wesentliche Vorteile für die automatische Auswertung:

1. Es braucht nur eine einzige Matrix aufgestellt zu werden (die Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$ aus Gl.(3/2.44)).
2. Die Ausgangsgrößen lassen sich ohne zusätzliche Matrizenmultiplikation bestimmen (siehe Gl.(3/2.45c)).

Das in Kapitel 6 entwickelte Rechenmodell stützt sich in seinem wesentlichen Kern auf die in diesem Abschnitt ermittelten Aussagen.

Das hergeleitete Rechenverfahren soll zur Verdeutlichung auf das begleitende Schaltbeispiel aus Bild 2/6 angewandt werden, dessen in Bild 2/12 dargestellte modifizierte Form als Grundlage der Ausführungen dient.

Mit Gl.(3/2.21a) lautet der in Gl.(3/2.38) definierte neue Variablenvektor

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Beim zugehörigen Eingangsvektor ist nur das siebte Element besetzt, das von der eingepprägten Quellwelle u_q herrührt:

$$\underline{v}' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_6 \\ v'_7 \\ v'_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ u_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die für die interessierenden Gleichungen (3/2.44) und (3/2.45) noch erforderliche Matrix $\underline{\Sigma}$ ist in Gl.(3/2.21e) angegeben. Damit sind alle eingehenden Größen bekannt. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird für die Gl.(3/2.44) nur die Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$ angegeben; die weiteren Zusammenhänge der Variablen lassen sich aus dem in Bild 3/10 gezeigten Signalfußgraphen erkennen, der die transformierten Beziehungen in verkoppelter Form beschreibt.

4. Anwendungsbeispiele

4.1 Allgemeines

Leitungsnetzwerke, die sich durch das in den beiden vorhergehenden Kapiteln erläuterte Grundmodell beschreiben lassen, finden besonders in der Hochfrequenztechnik und in der Impulstechnik Anwendung. Während bei hochfrequenztechnischen Anordnungen vorwiegend das Frequenzverhalten ausgenutzt wird, ist in der Impulstechnik besonders das Zeitverhalten von Interesse.

In den betreffenden Schaltungen der Hochfrequenztechnik wird die Elementarleitung häufig als $\lambda/4$ -Leitung bzw. $\lambda/2$ -Leitung bezeichnet (4/1), um anzudeuten, daß die Schaltung mit einer Welle betrieben wird, deren Länge gleich dem Vierfachen bzw. Doppelten der Länge des Leitungselementes ist. Je nach Einsatz und Beschaltung wirkt die Elementarleitung wie ein Transformator oder wie ein reeller bzw. komplexer Widerstand. Diese Eigenschaft gibt oft der gesamten Schaltung ihren Namen, z.B. Leitungstransformator oder LeitungsfILTER.

Beim Entwurf von LeitungsfILTern kann man unter Verwendung der Richardstransformation (4/2), mit der eine Überführung von Induktivitäten und Kapazitäten in kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Elementarleitungen möglich ist, auf die bekannten Ergebnisse der Filtertheorie konzentrierter Schaltungen zurückgreifen, wie beispielsweise von Ozaki und Ishii (4/3) gezeigt wurde. Nach den grundlegenden Arbeiten von Collin (4/4), Ikeno (4/5), Riblet (4/6) und anderen ist inzwischen eine umfangreiche Literatur zum Entwurf von TEM-Mikrowellen-fILTern und TEM-Mikrowellentransformatoren aus kommensurablen Leitungen entstanden. Außer auf die in (4/7,...,12) genannten Arbeiten soll in diesem Zusammenhang auf die Übersichtsaufsätze (4/13,14) hingewiesen werden. Im englischsprachigen Schrifttum wird die Elementarleitung meist als unit-element bezeichnet; der Begriff ist aber umfassender

und schließt Bauelemente wie mechanische Resonatoren oder bestimmte Arten von Resonanztransferschaltungen in sich ein (4/12).

In den Filter- und Anpassungsschaltungen wird das Leitungsnetzwerk zumeist als Zweitor betrieben; die vorherrschende Struktur ist die Leitungskaskade, von der kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Parallelleitungen abzweigen. Darüber hinaus sind aber auch ringförmige Anordnungen mit mehreren Ausgangstoren gebräuchlich, die zumeist als Leitungskoppler oder Summen-Differenz-Netzwerke eingesetzt werden (4/15).

Im Gegensatz zur Hochfrequenztechnik, in der zur Erzielung eines bestimmten Frequenzverhaltens geeignete Zusammenschaltungen aus einer Vielzahl von Elementarleitungen gebräuchlich sind, werden in der Impulstechnik entsprechende komplexe Zusammenschaltungen zum Erreichen eines gewünschten Zeitverhaltens noch wenig ausgenutzt. Ein zutreffendes Anwendungsbeispiel hat Ross in (4/16) veröffentlicht. Er stellt in seiner Arbeit ein Leitungsnetzwerk vor, dessen Sprungantwort aus einer Rechteckfolge besteht, aus der nach einer Filterung ein sinusförmiger Impulszug definierter Phase erzeugt wird.

In der Regel ist aber in der Impulstechnik weniger ein synthetischer und mehr ein analytischer Standpunkt vorherrschend, wenn es um das Verhalten von Leitungsnetzwerken geht. Der Grund liegt wohl darin, daß die dort zu realisierenden Syntheseaufgaben meist ganz andere Ziele haben: bei der Realisierung einer digitalen Schaltung kommt es beispielsweise primär auf das logische Verhalten an; erst wenn es wegen der Reflexion von Signalen auf den verbindenden Leitungen der Schaltglieder zu Störungen kommt (4/17,...,22), wird das Zeitverhalten der elektrischen Größen interessant. In erster Näherung kann dabei das bisher entwickelte Grundmodell zur Beschreibung eines Leitungsnetzwerks der Digitaltechnik herangezogen werden, z.B. wenn das Impulsverhalten einer in gleichen Abständen ohmisch belasteten

Leitung ermittelt werden soll. Mit Hilfe der im fünften Kapitel gezeigten Erweiterungen des Grundmodells können aber auch Kopplungen und reaktive Lasten berücksichtigt werden.

In den bisher geschilderten Anwendungsbeispielen für das Grundmodell ist der Elementarleitung jeweils ein Bauteil zugeordnet. Die Elementarleitung kann aber auch als sehr kleiner Leitungsabschnitt konstanten Wellenwiderstandes aufgefaßt werden. Eine inhomogene Leitung kann dann näherungsweise als Elementarleitungskaskade aufgefaßt werden, wenn die Unterteilung dicht genug gewählt wird. Mit dieser Netzwerkvorstellung hat beispielsweise Seitzer in seinen Untersuchungen über das Zeitverhalten inhomogener Leitungen und durch Inhomogenitäten gestörter homogener Leitungen gearbeitet (4/23, ..., 26).

In den beiden folgenden Abschnitten soll auf zwei impuls-technische Schaltungen näher eingegangen werden, deren wesentliches Element die Elementarleitung ist. Die entwickelten Schaltungen dienen dann später als Grundlage für einige Simulationsbeispiele. Zunächst wird über eine einfache Schaltung zur ungestörten Impulsübertragung berichtet und im Anschluß daran eine Gruppe neuartiger Schaltungen zur Impulsverkürzung vorgestellt.

4.2 Schaltungen zur Impulsanpassung

Bei der Übertragung von Impulsen über Leitungsnetzwerke tritt wegen der Reflexion an Stoßstellen im allgemeinen eine Verzerrung der Impulse auf. Wenn jedoch die Streukoeffizienten der Stoßstellen so gewählt werden können, daß sich die Übertragungsfunktion auf den Ausdruck

$$H_*(z) = h_d z^{-d} \quad \begin{array}{l} d \geq 0; \text{ ganzzahlig} \\ h_d \neq 0 \end{array} \quad (4/2.1)$$

reduzieren läßt, so wird der übertragene Impuls lediglich in seiner Amplitude auf das h_d -fache verändert und um

die Zeit dT verzögert, aber eine Verzerrung der Form tritt nicht auf. Dieses Verhalten soll mit Impulsanpassung bezeichnet werden.

Häufig wird die erforderliche Lösung für die Streukoeffizienten nicht realisierbar bzw. unzweckmäßig sein. Die Anforderungen können gemildert werden, wenn in das ursprüngliche Netzwerk zusätzliche physikalische Stoßstellen eingefügt werden, deren freie Parameter dann beim Erzielen eines günstigen Verhaltens mit berücksichtigt werden können.

Zur Verdeutlichung betrachten wir eine homogene Leitung mit dem Wellenwiderstand Z , die zwischen einem mit dem Innenwiderstand R_O behafteten Generator der Urspannung U_O und einem Lastwiderstand R_L , an dem die Spannung U_L abfällt, betrieben wird (s. Bild 4/1a). Unter der Annahme, daß die Leitung aus zwei gleichen Elementarleitungen zusammengesetzt gedacht sei, ergibt sich mit

$$r_O = \frac{Z - R_O}{Z + R_O} \quad \text{und} \quad r_L = \frac{R_L - Z}{R_L + Z} \quad (4/2.2)$$

aus der Analyse des in Bild 4/1b gezeigten Signalflußgraphen die Übertragungsfunktion

$$H_*(z) = \frac{U_L}{U_O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+r_O)(1+r_L) z^2}{z^4 + r_O r_L} \quad (4/2.3)$$

Eine verzerrungsfreie Übertragung ist nur möglich, wenn mindestens einer der Reflexionsfaktoren r_O oder r_L zu Null gemacht wird, d.h. mindestens eine der Forderungen

$$R_O = Z, \quad (4/2.4a)$$

$$R_L = Z \quad (4/2.4b)$$

erfüllt ist. Durch Einfügen eines Parallel- oder Serienwiderstandes in die Mitte der Leitung (s. Bild 4/1c und 4/1e)

können nun sowohl der Innen- als auch der Lastwiderstand beide vom Wellenwiderstand der Leitung abweichen, wenn man, wie anschließend gezeigt wird, die Bedingung

$$R_O R_L = Z^2 \quad (4/2.5)$$

einhält.

Bild 4/1c zeigt die durch den Parallelwiderstand R_P veränderte Schaltung und den zugehörigen Signalflußgraphen. Mit dem zusätzlichen Parameter

$$r_P = - \frac{Z}{2R_P + Z} \quad (4/2.6)$$

lautet nun die geänderte Übertragungsfunktion

$$H_{P*}(z) = \frac{1}{2} \frac{(1+r_O) (1+r_P) (1+r_L) z^2}{z^4 + r_P(r_O - r_L) z^2 + r_O r_L (1+2r_P)} \quad (4/2.7)$$

die mit der Festlegung der Parameter auf

$$r_P = -\frac{1}{2} \quad ; \quad (R_P = Z/2) \quad (4/2.8a)$$

und

$$r = r_O = r_L \quad ; \quad (R_L R_O = Z^2) \quad (4/2.8b)$$

übergeht in

$$H_{P*}(z) = \left((1+r)/2 \right)^2 z^{-2} \quad (4/2.9)$$

Wird in die Mitte der Schaltung ein Serienwiderstand R_S eingefügt, wie es Bild 4/1e zeigt, so erhält man eine Schaltung, die dem in Bild 2/6 eingeführten Schaltbeispiel entspricht. Der Widerstand R_S ergibt den zusätzlichen

Parameter

$$r_S = \frac{R_S}{R_S + 2Z} , \quad (4/2.10)$$

der die ursprüngliche Übertragungsfunktion überführt in

$$H_{S*}(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+r_O)(1-r_S)(1+r_L) z^2}{z^4 + r_S(r_O - r_L)z^2 + r_O r_L(1-2r_S)} , \quad (4/2.11)$$

wie sich durch Analyse des in Bild 4/1f gezeigten Signalflußgraphen überprüfen läßt. Mit der Festlegung des zusätzlichen Parameters auf

$$r_S = \frac{1}{2} ; \quad (R_S = 2Z) \quad (4/2.12)$$

und der wie beim Fall des Parallelwiderstandes nach Gl.(4/2.8b) zu wählenden Werte von r_O und r_L ergibt sich die auch bereits dort in Gl.(4/2.9) erhaltene Übertragungsfunktion für die Impulsanpassung. Es gilt nun $H_{S*}(z) = H_{P*}(z)$.

Die gezeigten Schaltungen zur Impulsanpassung sind bewußt einfach gewählt, um übersichtliche Verhältnisse zu erhalten. Gleichzeitig sollte ein Anwendungsfall für das in Bild 2/6 eingeführte, die Kapitel 2 und 3 begleitende Schaltbeispiel aufgezeigt werden. Die genannten Schaltungen werden im Abschnitt 7.5 als Beispiele für eine Simulation von Leitungsnetzwerken auf dem Analogrechner wieder aufgegriffen.

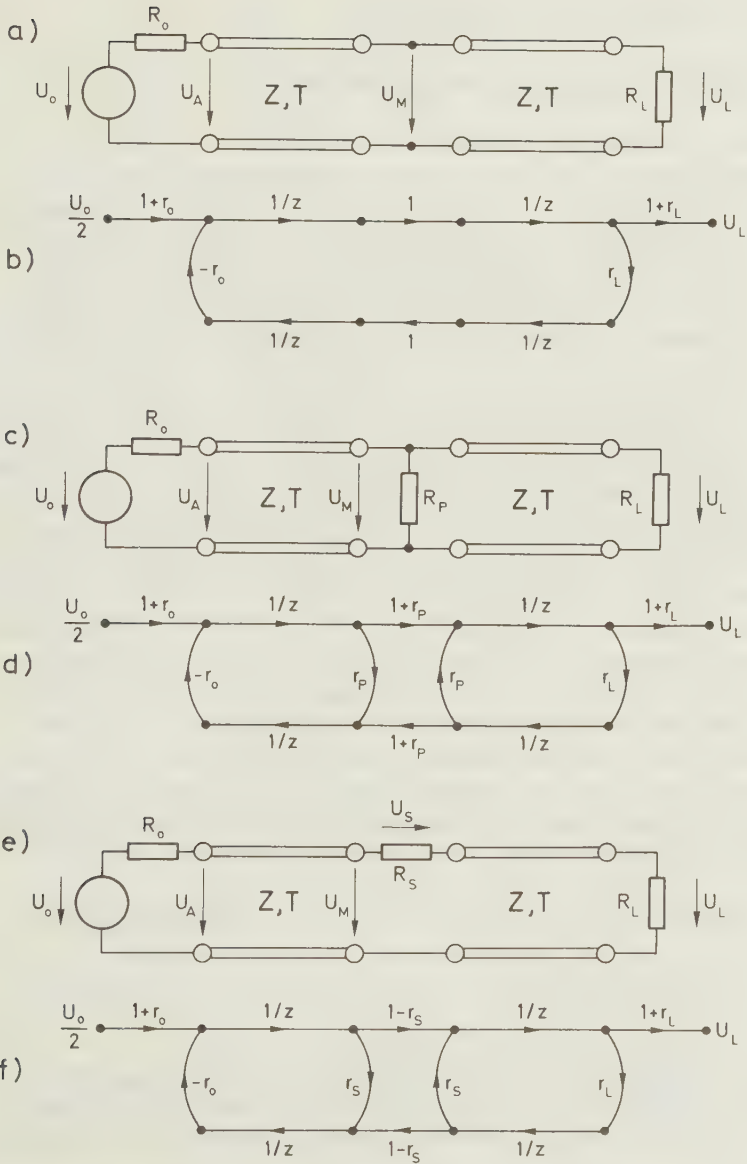


Bild 4/1: Einfache Schaltbeispiele zur Impulsanpassung

4.3 Impulsverkürzende Schaltungen

4.3.1 Herleitung der Übertragungsfunktion

Zum Verkürzen von Impulsen ist von Hoffmann (4/27) ein wechselseitig kurzgeschlossener Richtkoppler vorgeschlagen worden. Dieser Übertrager hat die Eigenschaft, bei ausgangseitigem Leerlauf und bei Betrieb mit eingepprägter Spannung die Amplitude von Rechteckimpulsen verzerrungsfrei umzukehren und die Impulsdauer, die ursprünglich gleich der vierfachen Laufzeit der Koppelstrecke ist, auf die Hälfte zu verringern. Die bei verletzten Betriebsbedingungen auftretenden Impulsverzerrungen sind von Helm (4/28) untersucht worden. Nonnenmacher (4/29) hat bemerkt, daß die gleiche Impulsverkürzung bei fehlender Amplitudenumkehr auch von einer Doppelleitung bewirkt wird, die ebenfalls am Ausgang leerlaufen muß und von einer Quelle mit verschwindendem Innenwiderstand zu speisen ist. Daß die Dämpfungsfreiheit wesentlich für ideale impulsverkürzende Schaltungen ist, werden die folgenden Ausführungen noch verdeutlichen. In ihnen wird der allgemeine Fall behandelt, wie das Übertragungsverhalten von Leitungsnetzwerken geartet sein muß, wenn eine Impulsverkürzung auf den g -ten Teil (g ganzzahlig) erreicht werden soll. Die Betrachtung der Vorgänge, die eine Impulsverkürzung bewirken, ergibt zunächst die geforderte Impulsantwort, die dann zu einem geschlossenen Ausdruck für die Übertragungsfunktion impulsverkürzender Systeme führt.

Das Maß für die Impulsverkürzung ist der Verkürzungsfaktor

$$\eta = \frac{1}{g} = \frac{T_{\text{AUS}}}{T_{\text{EIN}}} . \quad (4/3.1)$$

Er ist das Verhältnis der Ausgangsimpulsdauer T_{AUS} zur Eingangsimpulsdauer T_{EIN} . Zweckmäßigerweise wird die Dauer der Impulse auf die Laufzeit T der Elementarleitung bezogen.

Mit

$$T_{\text{AUS}} = \alpha T \quad (4/3.2a)$$

folgt aus Gl.(4/3.1)

$$T_{\text{EIN}} = \beta \alpha T . \quad (4/3.2b)$$

Die Darstellung der Eingangsimpulsdauer als Produkt von drei Faktoren erscheint zunächst willkürlich und kann erst später gerechtfertigt werden.

Um die gesuchte Übertragungsfunktion impulsverkürzender Systeme herzuleiten, gehen wir von einer anschaulichen Beschreibung des Verkürzungsvorgangs aus. Wir benötigen dazu die Kenntnis der allgemeinen Impulsantwort $h(t)$ der betrachteten Leitungsnetzwerke. Da für diese Netzwerke das Zustandskonzept linearer, diskreter Systeme gilt, können wir auf die Ergebnisse der Theorie dieser Systeme zurückgreifen: nach Gl.(3/2.11) gilt für die Impulsantwort

$$h(t) = h_{\star}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_0(t-kT) . \quad (4/3.3)$$

Bei einem linearen, zeitinvarianten System mit der Impulsantwort $h(t)$ sind die Ausgangsfunktion $y(t)$ und die Eingangsfunktion $u(t)$ über die bekannte Faltungsbeziehung

$$y(t) = u(t) \star h(t) = \int_0^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (4/3.4)$$

miteinander verknüpft. Die Auswertung dieses Faltungsintegrals ist für die hier betrachteten Leitungsnetzwerke besonders einfach, da die in Gl.(4/3.3) beschriebene Impulsantwort lediglich aus einer gewichteten Folge von äquidistanten Impulsen besteht und sich deshalb die Ausgangsfunktion

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_0(t-kT) d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k u(t-kT) \quad (4/3.5)$$

unmittelbar als gewichtete Summe von zeitlichen Verschiebungen der Eingangsfunktion ergibt. Wegen der einfachen Gestalt der Ein-Ausgangsbeziehung läßt sich leicht auch umgekehrt die Impulsantwort bestimmen, wenn die Eingangs- und die Ausgangsfunktion festgelegt sind.

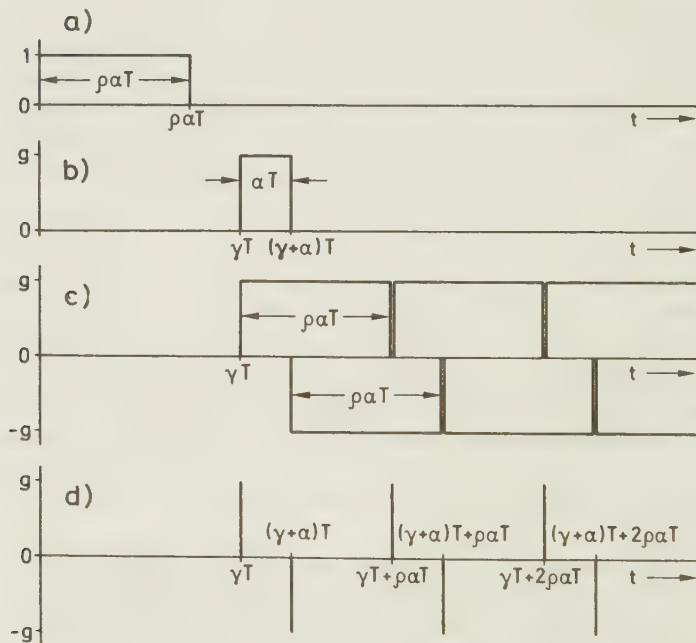


Bild 4/2: Zur Verdeutlichung der Vorgänge bei der Impulsverkürzung

Die Anwendung der beschriebenen Zusammenhänge auf die Impulsverkürzung gibt Bild 4/2. Bild 4/2a zeigt einen an den Eingang des verkürzenden Systems gelegten Rechteckimpuls

$$u_R(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - g\alpha T) \quad (4/3.6)$$

der Dauer $T_{\text{EIN}} = g\alpha T$, Bild 4/2b den auf die Dauer $T_{\text{AUS}} = \alpha T$ verkürzten Rechteckimpuls

$$y_R(t) = g \left(\delta_{-1}(t - \gamma T) - \delta_{-1}(t - (\gamma + \alpha)T) \right), \quad (4/3.7)$$

der nach der Zeit

$$T_G = \gamma T \quad (4/3.8)$$

am Ausgang mit der von Eins auf g geänderten Amplitude erscheint. Der Faktor γ gibt die Mindestanzahl der Elementarleitungen auf dem Weg zwischen Eingang und Ausgang des Leitungsnetzwerks an und kann die Werte

$$\gamma = 0, 1, 2 \dots$$

annehmen. Der Ausgangsimpuls läßt sich offenbar derart aus den versetzten, mit dem Gewicht g bewerteten Wiederholungen des Eingangsimpulses gewinnen, wie es Bild 4/2c angibt. Die Impulsantwort des sich dämpfungsfrei erweisenden Systems läßt sich unmittelbar aus Bild 4/2c ablesen. Sie ist in Bild 4/2d dargestellt und lautet

$$h(t) = g \sum_{i=0}^{\infty} \delta_0(t - i g \alpha T - \gamma T) - g \sum_{i=0}^{\infty} \delta_0(t - i g \alpha T - (\gamma + \alpha)T) \quad (4/3.9)$$

Da die Teilimpulse der Impulsantwort nur zu Vielfachen der Laufzeit T auftauchen können, sind die Differenzen zwischen den Impulsen ebenfalls ganze Vielfache. Daraus folgt, daß für die Größen α und ϱ nur ganze Zahlen in Frage kommen, wenn die Impulsverkürzung wie dargestellt mit Rechteckimpulsen erfolgt.

Die Impulsantwort hat die Laplace-Transformierte

$$H(s) = g \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(i\varrho + \gamma)sT} - g \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(i\varrho + \gamma + \alpha)sT} \quad (4/3.10a)$$

woraus sich über die Substitution $z=e^{sT}$ zunächst

$$H_*(z) = g \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^{-(i\varrho + \gamma)} - \sum_{i=0}^{\infty} z^{-(i\varrho + \gamma + \alpha)} \right) \quad (4/3.10b)$$

ergibt. Durch Umformung der geometrischen Reihen in geschlossene Ausdrücke folgt die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$H_*(z) = g z^{-\gamma} \frac{1-z^{-\alpha}}{1-z^{-\varrho\alpha}} \quad (4/3.10c)$$

$$= g z^{\alpha(\varrho-1)-\gamma} \frac{z^{\alpha}-1}{z^{\varrho\alpha}-1} \quad (4/3.10d)$$

die sich unter Verwendung der Beziehung

$$(x^n-1) : (x-1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1$$

auch noch in folgender Form angeben läßt:

$$H_*(z) = \frac{g z^{\alpha(\gamma-1)-\gamma}}{(z^\alpha)^{\gamma-1} + (z^\alpha)^{\gamma-2} + \dots + (z^\alpha)^2 + (z^\alpha) + 1} \quad (4/3.10e)$$

Eine einfachere aber unanschauliche Bestimmung der Übertragungsfunktion $H(s)$ bzw. $H_*(z)$ ergibt sich, wenn man in der allgemeinen Ein-Ausgangsbeziehung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \quad (4/3.11)$$

die Laplace-Transformierten des festgelegten Eingangs- und Ausgangsimpulses einsetzt und nach $H(s)$ bzw. nach der Substitution $z=e^{sT}$ nach $H_*(z)$ auflöst:

$$g \frac{1}{s} z^{-\gamma} (1-z^{-\alpha}) = H_*(z) \frac{1}{s} (1-z^{-\gamma\alpha}) \quad (4/3.12)$$

Man erhält so unmittelbar die Übertragungsfunktion in der Form von Gl.(4/3.10c).

Beim Entwurf impulsverkürzender Schaltungen kann man nun von der Übertragungsfunktion des Systems ausgehen, deren Koeffizienten so zu bestimmen sind, wie es Gl.(4/3.10e) angibt. Wesentlich ist die Einhaltung der Koeffizientenbedingung des Nennerpolynoms, um in der z -Ebene die geforderte Pollage auf dem Einheitskreis zu gewährleisten. Der die Verzögerung des Impulses beschreibende Exponent γ und der Amplitudenfaktor g sind für die Verkürzung selbst ohne Bedeutung; ihre Werte ergeben sich zwangsläufig aus der Art der realisierenden Schaltung. Für praktische Anwendungsfälle ist es eventuell günstig, wenn der Eingangsimpuls nur gering verzögert und wenn eine möglichst große Amplitudenerhöhung erreicht wird: es wären also kleine Werte für γ und große für g anzustreben. Gl.(4/3.10) besagt, daß der Grad des Systems und damit der Aufwand nur von den Faktoren α und γ abhängen. Um den Aufwand gering zu halten, ist bei festgesetzter Verkürzung der ganzzahlige Faktor α möglichst niedrig zu halten. Beispielsweise läßt sich für die später untersuchte Leitungskaskade der

Wert $\alpha_{\min}=2$ erreichen, der wegen der festgelegten Struktur nicht weiter zu verkleinern ist. Bei festliegendem Mindestwert für α , der durch die Struktur bedingt ist, hängt also der Aufwand allein von der gewünschten Verkürzung $\eta=1/\varrho$ ab.

Bei der Herleitung der allgemeinen Übertragungsfunktion impulsverkürzender Systeme wurde stillschweigend angenommen, daß eine Verkürzung nur für Rechteckimpulse möglich ist. Für die behandelten Rechteckimpulse kann dabei der Begriff Verkürzung in zwei verschiedenen, sich aber nicht ausschließenden Bedeutungen verstanden werden: der verkürzte Impuls kann der Form nach sowohl als gestauchter, zusammengedrückter Eingangsimpuls aufgefaßt werden, aber auch als ein abgeschnittener, gekürzter Teil. Die weiteren Ausführungen zeigen nun, daß eine impulsverkürzende Schaltung der beschriebenen Art im wesentlichen als Trennschaltung wirkt, mit der aus einer Eingangsimpulsfolge ein Teilimpuls herausgelöst wird, der am Ausgang der Schaltung mit bewerteter Amplitude erscheint und zeitlich verzögert ist.

Um die Zusammenhänge aufzuzeigen, multiplizieren wir Zähler und Nenner der in Gl.(4/3.10e) ausgedrückten Übertragungsfunktion $H_x(z)$ mit dem Faktor $z^{-\alpha(\varrho-1)}$ $F(s)$, wobei $F(s)$ die Laplace-Transformierte eines beliebigen zeitlichen Impulses $f(t)$ ist, und ersetzen die Variable z durch e^{sT} :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{g e^{-\gamma s T} F(s)}{F(s) \sum_{j=0}^{\varrho-1} e^{-j\alpha s T}} \quad (4/3.13)$$

Wird an den Eingang der impulsverkürzenden Schaltung ein im Bildbereich durch

$$U_F(s) = F(s) \cdot \sum_{j=0}^{\varrho-1} e^{-j\alpha s T} \quad , \quad (4/3.14a)$$

bzw. im Zeitbereich durch

$$u_F(t) = \sum_{j=0}^{q-1} f(t-j\alpha T) \quad (4/3.14b)$$

beschriebener Impulszug gelegt, so erscheint nach Gl.(4/3.13) am Ausgang der Impuls

$$Y_F(s) = g \cdot e^{-\delta s T} F(s) \quad , \quad (4/3.15a)$$

bzw.

$$y_F(t) = g \cdot f(t-\delta T) \quad . \quad (4/3.15b)$$

Am Ausgang des Systems erscheint mit bewerteter Amplitude also genau einer der q Teilimpulse, aus denen sich das Eingangssignal additiv zusammensetzt. Dabei ist die Form und die Dauer der Teilimpulse keinen Bedingungen unterworfen; es muß lediglich der Gesamtimpuls im Abstand αT aus den versetzten Teilimpulsen aufgebaut sein.

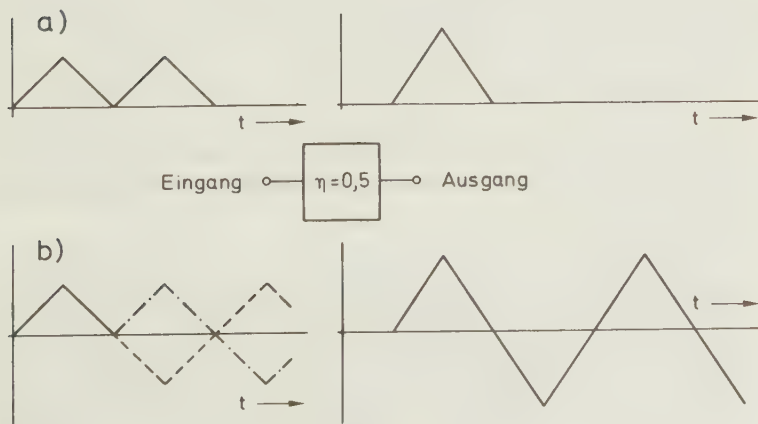


Bild 4/3: Zur Trennung von Teilimpulsen mit impulsverkürzenden Schaltungen

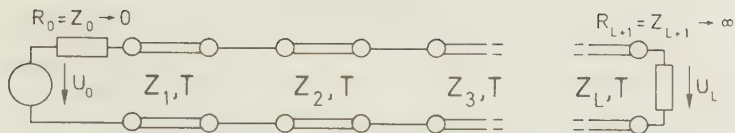
Zur Verdeutlichung dient Bild 4/3. Es stellt die Verhältnisse an einer impulsverkürzenden Schaltung mit der Verkürzung $\eta=0,5$ ($q=2$) dar. Bild 4/3a zeigt einen Eingangsimpulszug aus zwei endlichen dreieckförmigen Teilimpulsen; am Ausgang erscheint der Teilimpuls verzögert und bewertet. Im Gegensatz dazu steht Bild 4/3b, wo der einzelne Teilimpuls eine dreieckförmige Schwingung ist; für diesen Fall ist der Begriff der Verkürzung nun ganz unanschaulich geworden.

Der Nachteil der hier besprochenen idealen impulsverkürzenden Systeme ist die geforderte Dämpfungsfreiheit. Beim Entwurf realer Systeme muß eine Dämpfung in Kauf genommen werden, die in erster Näherung durch einen von Null verschiedenen Innenwiderstand der Quelle und von einem endlichen Abschlußwiderstand hervorgerufen wird. Die Folge davon sind Verzerrungen des verkürzten Impulses, die sich beispielsweise in einer Veränderung der Amplitude des Hauptimpulses und im Entstehen eines Echos äußern können. Es entsteht ein neues Entwurfproblem mit der Fragestellung, wie die Koeffizienten der Übertragungsfunktion zu wählen sind, um die Toleranzgrenzen der Verzerrungen optimal auszunutzen. Dieser Themenkomplex soll aber in dieser Arbeit nicht weiter untersucht werden.

Im folgenden wird eine bestimmte Klasse idealer impulsverkürzender Schaltungen, nämlich die Elementarleitungskaskade, näher untersucht.

4.3.2 Theoretische Untersuchung der Kaskadenschaltung

Zur Erläuterung des Entwurfs idealer impulsverkürzender Schaltungen und als Grundlage für einige Simulationsbeispiele betrachten wir eine Kaskade von L Elementarleitungen. Bild 4/4 zeigt die Schaltung und den zugehörigen Signalflußgraphen.



$$r_l = \frac{Z_{l+1} - Z_l}{Z_{l+1} + Z_l}, \quad l=0, 1, \dots, L$$

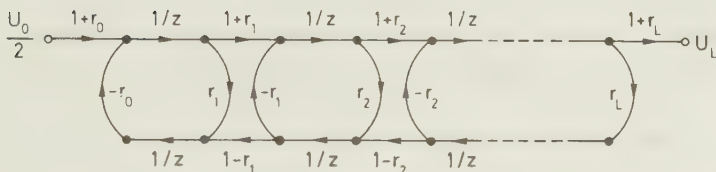


Bild 4/4: Schaltung und Signalflußgraph der Kaskadenschaltung

Die Kaskadenschaltung hat die Eigenschaft, daß ihre Übertragungsfunktion, die hier aus der automatischen Analyse des Signalflußgraphen gewonnen wird, schon weitgehend den Forderungen zur Impulsverkürzung genügt. Sie lautet allgemein

$$\frac{U_L}{U_0} = \frac{\frac{1}{2} \prod_{l=0}^L (1+r_l) z^L}{(z^2)^L + a_{L-1}(z^2)^{L-1} + a_{L-2}(z^2)^{L-2} + \dots + a_1(z^2) + a_0} \quad (4/3.16)$$

Bei einer Anwendung zur Impulsverkürzung sind lediglich die Nennerkoeffizienten a_l nach Gl.(4/3.10e) festzulegen, die dann zu Bestimmungsgleichungen für die in sie eingehenden Reflexionsfaktoren r_l führen. Werden alle Koeffizienten a_l auf den Wert Eins festgelegt, so ergibt sich die größtmögliche Impulsverkürzung, nämlich

$$\eta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{L+1} \quad (4/3.17)$$

Der Eingangsimpuls muß dabei die Dauer

$$T_{\text{EIN}} = g \alpha T = 2(L+1)T \quad (4/3.18)$$

besitzen; er wird auf die Dauer

$$T_{\text{AUS}} = \alpha T = 2T \quad (\alpha=2) \quad (4/3.19)$$

verkürzt und erscheint nach der Zeit γT am Ausgang ($\gamma=L$). Dabei tritt eine Amplitudenerhöhung der Ausgangsspannung U_L gegenüber der Eingangsquellspannung U_0 um den Faktor

$$g = \frac{1}{2} \prod_{l=0}^L (1+r_l) \quad (4/3.20a)$$

auf (d.h. gegenüber der Quellwelle $U_q=U_0/2$ ist die Amplitude auf $2g$ gestiegen). Es läßt sich zeigen, daß die Amplitudenerhöhung gleich der reziproken Verkürzung ist:

$$g = \frac{1}{\gamma} = g = L+1 \quad . \quad (4/3.20b)$$

Die Impulsfläche bleibt demnach erhalten. Bild 4/5 zeigt die Verhältnisse für wachsende Anzahl L der Elementarleitungen.

Werden einzelne Nennerkoeffizienten nicht auf den Wert Eins, sondern auf den Wert Null gebracht, so läßt sich eine Erhöhung von α und eine Verringerung von γ erreichen. Korrespondierende Schaltungen bestehen dann beispielsweise aus Leitungsstücken einer gleichen Anzahl gleichartiger Elementarleitungen. Auf diese Besonderheiten wird aber nicht näher eingegangen, sondern nur der Fall maximaler Verkürzung behandelt.

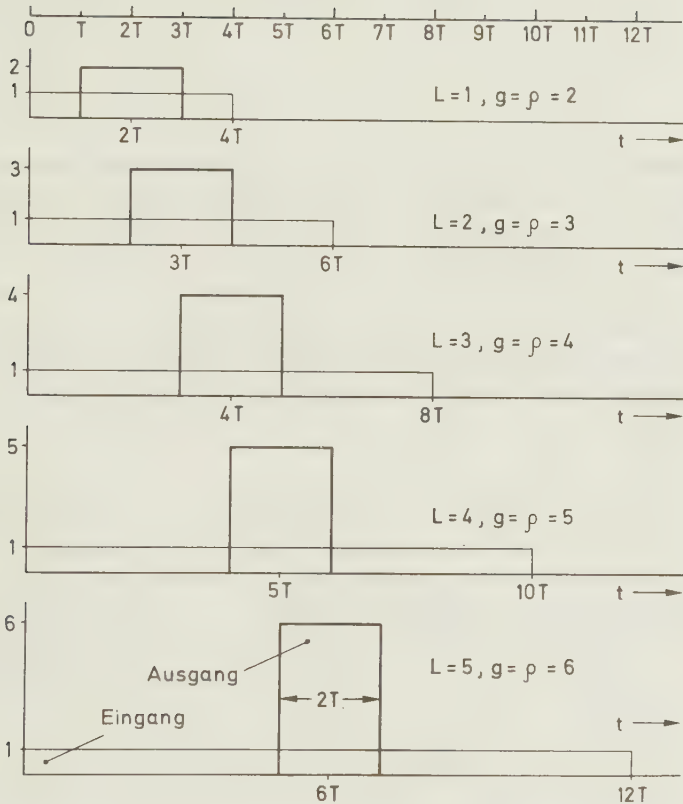


Bild 4/5: Zur Impulsverkürzung bei der Elementarleitungs-kaskade

Im folgenden wird die Kaskade bis zu einer maximalen Anzahl von $L=5$ Elementarleitungen näher untersucht. Wie die Dimensionierungsbeispiele zeigen, wachsen mit größer werdender Anzahl L die Freiheitsgrade in der Wahl der Reflexionsfaktoren bzw. Wellenwiderstände. Weiterhin ergibt sich, daß in der Regel die Werte der Wellenwiderstände im Lauf der Kaskade zum Ausgang hin ansteigen. Von Vorteil scheint die Dimensionierung zu sein, bei der das Wellenwiderstandsverhältnis

$$w = \frac{z_L}{z_1} = \frac{\prod_{\nu=1}^{L-1} (1+r_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{L-1} (1-r_\nu)} \quad (4/3.21)$$

möglichst klein ist. Aber auch der Fall einzelner verschwindender Reflexionsfaktoren erscheint günstig, weil die Schaltung dann mit weniger Leitungsstücken unterschiedlichen Wellenwiderstandes auskommt.

Die in Kapitel 8 beschriebene automatische Analyse von Signalflußgraphen ergibt folgende Beziehungen für die Neunerkoeffizienten der Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} a_{L-1} &= \sum_{i=0}^{L-1} r_{1+i} r_{0+i} \\ a_{L-2} &= \sum_{i=0}^{L-2} r_{2+i} r_{0+i} + \sum_{i=0}^{L-3} r_{3+i} r_{2+i} \sum_{j=0}^1 r_{1+j} r_{0+j} \\ a_{L-3} &= \sum_{i=0}^{L-3} r_{3+i} r_{0+i} + \sum_{i=0}^{L-4} r_{4+i} r_{2+i} \sum_{j=0}^1 r_{1+j} r_{0+j} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{L-4} r_{4+i} r_{3+i} \sum_{j=0}^1 r_{2+j} r_{0+j} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{L-5} r_{5+i} r_{4+i} \sum_{j=0}^1 r_{3+j} r_{2+j} \sum_{k=0}^j r_{1+k} r_{0+k} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ a_1 &= \sum_{i=0}^1 r_{L-1+i} r_{0+i} + r_{L-0} \sum_{i=0}^{L-3} r_{2+i} r_{1+i} \\ a_0 &= r_L r_0. \end{aligned} \quad (4/3.22)$$

Der Koeffizient a_l besteht dabei aus $\binom{L}{l}$ Summanden. Die zu erfüllenden Bedingungen

$$a_l = 1 \quad \text{für } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (4/3.23)$$

überführen obiges Gleichungssystem in Bestimmungsgleichungen für die $L+1$ Reflexionsfaktoren r_l . Die Forderung $a_0=1$ wird durch die physikalisch allein sinnvolle Beziehung

$$r_0 = r_L = 1 \quad (4/3.24)$$

erfüllt. Sie besagt, daß grundsätzlich alle Schaltungen ausgangsseitig im Leerlauf und eingangsseitig mit eingepreger Spannung betrieben werden müssen.

Durch die Kenntnis der Reflexionsfaktoren r_0 und r_L vereinfachen sich die Bestimmungsgleichungen für die restlichen Reflexionsfaktoren. In der folgenden, nach der Elementarleitungsanzahl geordneten Aufstellung werden Lösungen für die Reflexionsfaktoren explizit angegeben bzw. die Bedingungen näher spezifiziert. Dabei werden nur Lösungen betrachtet, die die Realisierbarkeitsbedingung

$$|r_l| < 1, \quad l=1, 2, \dots, L-1 \quad (4/3.25)$$

erfüllen. Auf mögliche Fälle einzelner verschwindender Reflexionsfaktoren wird gegebenenfalls hingewiesen. Die Aufstellung wird durch die Angabe des jeweiligen Wellenwiderstandsverhältnisses nach Gl.(4/3.21) ergänzt.

Kaskade aus einer Elementarleitung ($L=1$; $S=g=2$)

Die zu bestimmenden Reflexionsfaktoren sind bereits durch Gl.(4/3.24) auf $r_0=1$ und $r_1=1$ festgelegt; es ist $w=1$.

Kaskade aus zwei Elementarleitungen ($L=2$; $S=g=3$)

Die Lösung für die Reflexionsfaktoren ist $r_0=1$, $r_1=1/2$, $r_2=1$; es ist $w=3$. Von späterem Interesse ist die

Beziehung

$$(1+r_1) = 1,5 \quad ; \quad (4/3.26)$$

die genannte Schaltung wird im Abschnitt 7.5 mit dem Analogrechner näher untersucht.

Kaskade aus drei Elementarleitungen ($L=3$; $g=g=4$)

Aus Gl.(4/3.24) folgt $r_0=1$, $r_3=1$. Die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 sind über die Beziehung

$$(1+r_1) (1+r_2) = 2 \quad (4/3.27a)$$

miteinander verknüpft; d.h.

$$r_1 = \frac{1-r_2}{1+r_2} \quad (4/3.27b)$$

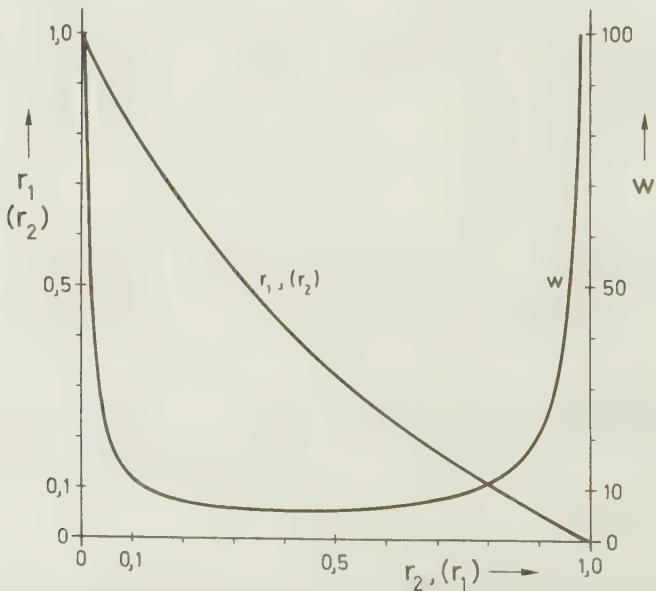


Bild 4/6: Zur Dimensionierung der aus drei Elementarleitungen aufgebauten impulsverkürzenden Schaltung

Die Werte für r_1 und r_2 sind untereinander vertauschbar. Für $r=r_1=r_2=\sqrt{2}-1$ ist das Widerstandsverhältnis w minimal; es ist $w_{\min}=3+2\sqrt{2}\approx 5,8$. Bild 4/6 zeigt die Abhängigkeit der Größen r_1 und w vom Reflexionsfaktor r_2 ; für das Widerstandsverhältnis gilt dabei

$$w = \frac{(1+r_2)}{r_2(1-r_2)} \quad (4/3.28)$$

Kaskade aus vier Elementarleitungen ($I=4$; $g=g=5$)

Aus Gl.(4/3.24) folgt $r_0=1$, $r_4=1$. Die Reflexionsfaktoren r_1 , r_2 und r_3 müssen den beiden Bedingungen

$$(r_1+r_3)(1+r_2) = 1 \quad (4/3.29a)$$

und

$$(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) = 2,5 \quad (4/3.29b)$$

genügen, aus denen sich eine explizite Lösung für r_1 und r_3 mit r_2 als freiem Parameter gewinnen läßt, nämlich

$$r_{1,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4r_2^2 + 2r_2 - 1}}{2(1+r_2)} \quad (4/3.30)$$

Die Werte für r_1 und r_3 sind untereinander vertauschbar. Zu dem Mindestwert $r_{2\min}=(\sqrt{5}-1)/4\approx 0,309$ gehören die Werte $r_1=r_3=2/(3+\sqrt{5})\approx 0,382$ und das minimale Widerstandsverhältnis $w_{\min}\approx 9,5$. Die Reflexionsfaktoren r_1 bzw. r_3 verschwinden an der Stelle $r_2=1/2$: es gilt $r_1=0$ und $r_3=2/3$ bzw. $r_1=2/3$ und $r_3=0$; das zugehörige Widerstandsverhältnis ist $w(r_2=1/2) = 15$.

Bild 4/7 zeigt die Abhängigkeit der Größen $r_{1,3}$ von r_2 nach Gl.(4/3.30) und den Verlauf des Widerstandsverhältnisses

$$w = 5 \frac{1+r_2}{1-r_2} \quad (4/3.31)$$

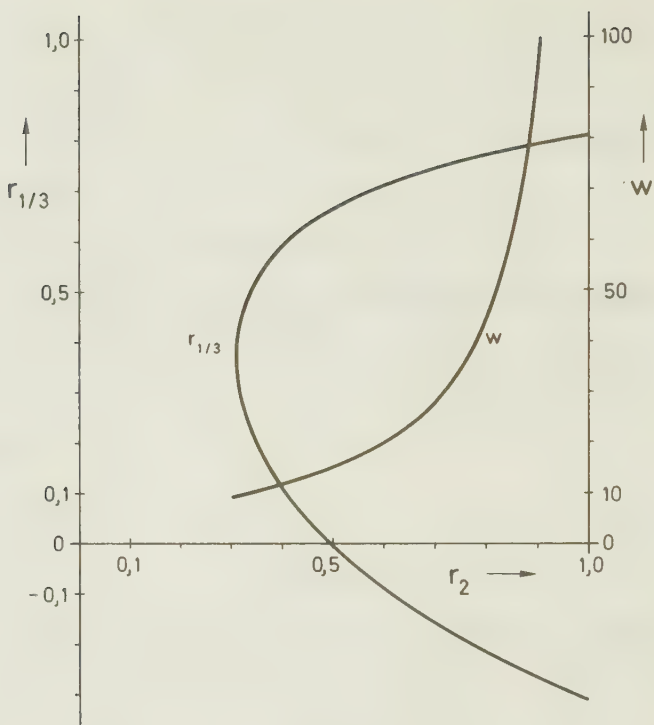


Bild 4/7: Zur Dimensionierung der aus vier Elementarleitungen aufgebauten impulsverkürzenden Schaltung

Kaskade aus fünf Elementarleitungen ($L=5$; $g=g=6$)

Nach Gl.(4/3.24) gilt $r_0=1$, $r_5=1$. Die Reflexionsfaktoren $r_1, \dots, r_4$ sind den Bestimmungsgleichungen

$$r_1 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_4 = 1 \quad (4/3.32a)$$

und

$$(1+r_1) (1+r_2) (1+r_3)(1+r_4) = 3 \quad (4/3.32b)$$

unterworfen. In den Beziehungen kann r_1 mit r_4 ausgetauscht

werden, wenn gleichzeitig r_2 durch r_3 ersetzt wird. Da die vier Parameter durch nur zwei Bedingungen miteinander verknüpft sind, ergibt sich, wie sich zeigen läßt, eine große Lösungsvielfalt. Eine ausgezeichnete Lösung des Gleichungssystems Gl.(4/3.31) ist

$$r_1 = r_4 = \sqrt{1 - (\sqrt{3})/2} \approx 0,366 \quad , \quad (4/3.33a)$$

$$r_2 = r_3 = 1 - \sqrt{2(2 - \sqrt{3})} \approx 0,268 \quad . \quad (4/3.33b)$$

Es läßt sich nämlich durch Anwendung eines Minimisierungsverfahrens (4/30) auf das in Gl.(4/3.21) ausgedrückte Wellenwiderstandsverhältnis w als Zielfunktion zeigen, daß für den in Gl.(4/3.32) ausgedrückten Parametersatz die Zielfunktion den minimalen Wert

$$w_{\min} \approx 13,93 \quad (4/3.33c)$$

annimmt.

Weitere interessierende Lösungen sind die Fälle verschwindender Reflexionsfaktoren. Es läßt sich zeigen, daß immer nur ein Reflexionsfaktor den Wert Null annehmen kann, da sonst die anderen die Realisierbarkeitsbedingung Gl.(4/3.25) verletzen bzw. das System Gl.(4/3.32) nicht mehr in sich verträglich ist.

Für den Fall $r_1=0$ ergibt sich aus Gl.(4/3.32) eine Darstellung für die Reflexionsfaktoren r_2 und r_4 mit r_3 als Parameter:

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{r_3^2 - r_3 + 1}}{r_3} \quad , \quad (4/3.34a)$$

$$r_4 = \frac{\sqrt{r_3^2 - r_3 + 1}}{1 + r_3} \quad . \quad (4/3.34b)$$

Bild 4/8a zeigt den Verlauf von r_2 und r_4 in Abhängigkeit von r_3 und den Verlauf des zugehörigen Widerstandsverhältnisses w nach Gl.(4/3.21). Für das minimale Widerstandsverhältnis unter der Nebenbedingung $r_1=0$ gilt

$$w_{\min}(r_1=0) \approx 19,24 \quad ; \quad (4/3.34c)$$

es liegt bei $r_2 \approx 0,291$; $r_3 \approx 0,456$; $r_4 \approx 0,595$.

Für den Fall $r_2=0$ läßt sich ebenfalls aus Gl.(4/3.32) eine Darstellung für r_1 und r_4 mit r_3 als Parameter gewinnen:

$$r_1 = \frac{1+r_3 \pm \sqrt{r_3^2 + 6r_3 - 3}}{2} \quad , \quad (4/3.35a)$$

$$r_4 = \frac{1-r_3 \pm \sqrt{r_3^2 + 6r_3 - 3}}{2(1+r_3)} \quad . \quad (4/3.35b)$$

Für eine graphische Darstellung von Gl.(4/3.35) erweist sich der zugelassene Wertebereich $0,4641 \leq r_3 < 1$ als ungünstig; geeigneter ist die äquivalente Parameterdarstellung

$$r_3 = \frac{r_1^2 - r_1 + 1}{1 + r_1} \quad , \quad (4/3.36a)$$

$$r_4 = \frac{1 - r_1^2}{2 + r_1^2} \quad . \quad (4/3.36b)$$

Bild 4/8b zeigt die graphische Darstellung von r_3 und r_4 in Abhängigkeit von r_1 nach Gl.(4/3.36) und den Verlauf des zugehörigen Widerstandsverhältnisses w nach Gl.(4/3.21). Für das minimale Widerstandsverhältnis unter der Nebenbedingung $r_2=0$ gilt

$$w_{\min}(r_2=0) \approx 17,77 \quad ; \quad (4/3.36c)$$

es liegt bei $r_1 \approx 0,442$; $r_3 \approx 0,522$; $r_4 \approx 0,366$.

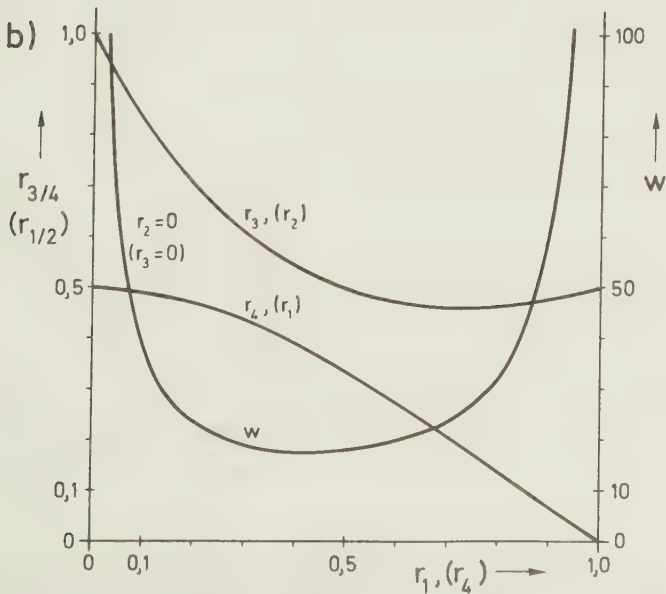
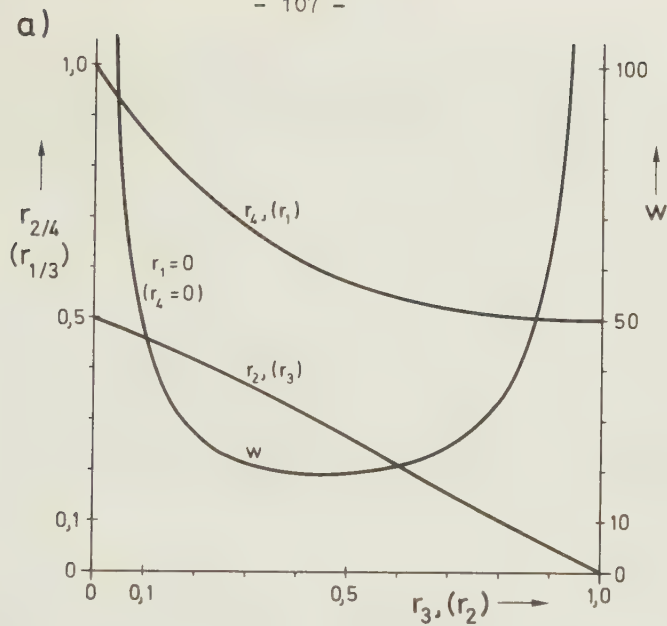


Bild 4/8: Zur Dimensionierung der aus fünf Elementarleitungen aufgebauten impulsverkürzenden Schaltung

Folgerungen: Die Behandlung der Elementarleitungskaskade als ideale impulsverkürzende Schaltung zeigt, daß sich auch stärkere Verkürzungen als der bisher bekannte Fall $\eta = 0,5$ erreichen lassen. Aus den Gleichungen Gl.(4/3.26), Gl.(4/3.27), Gl.(4/3.29b) und Gl.(4/3.32b) läßt sich für die Amplitudenerhöhung g das Bildungsgesetz

$$g(L) = \frac{1}{2} \prod_{l=0}^L (1+r_l) = L+1 = \frac{1}{\eta} \quad (4/3.37a)$$

erkennen. Es besagt, daß bei der Impulsverkürzung mit der Elementarleitungskaskade das Produkt aus Amplitudenerhöhung und Verkürzung konstant ist

$$\eta g = 1 . \quad (4/3.37b)$$

Die behandelten Beispiele lassen erkennen, daß mit wachsen der Anzahl der Elementarleitungen freie Parameter für die Dimensionierung entstehen.

5. Erweiterung des Grundmodells durch Einfügung weiterer Netzwerkelemente

5.1 Allgemeines

Bei der Einführung des Grundmodells der betrachteten Leitungsnetzwerke sind wir von einem konkreten physikalischen Netzwerk aus unverkoppelten Leitungen, Widerständen und Zweipolquellen ausgegangen, haben die Bauteile durch idealisierte Eigenschaften gekennzeichnet und ihnen mathematisch definierte Netzwerkelemente zugeordnet. Das so erhaltene abstrakte Netzwerkmodell kann durch die wellenmäßige Ersetzung von Widerständen und Quellen in eine modifizierte Form übergeführt werden, deren wesentliches Netzwerkelement die Elementarleitung ist. Das ursprüngliche bzw. modifizierte Modell wird der Struktur nach vereinfacht in Stoßstellen und Elementarleitungen gegliedert und durch zwei, ihrem Aufbau nach verschiedene Spannungstreumatrizen beschrieben, nämlich durch die verallgemeinerte Streumatrix $\underline{\Sigma}$, in die die reellen Streukoeffizienten der Stoßstellen eingehen, und durch die verallgemeinerte Streumatrix e^{-sT_K} , die die Zeitverzögerung der Spannungswellen auf den Elementarleitungen charakterisiert. Es wurde gezeigt, daß sich das Verhalten des so eingeführten Grundmodells durch die Zustandsgleichungen linearer, diskreter, zeitinvarianter Systeme beschreiben läßt.

Im folgenden wird nun erläutert, wie sich weitere abstrakte Netzwerkelemente in das Grundmodell einfügen lassen, ohne daß die geforderte prinzipielle Beschreibungsmöglichkeit durch Zustandsgleichungen bzw. Differenzengleichungen verlorengeht. Die Ausführungen beschränken sich dabei auf Mehrfachleitungen, homogene Leitungsstücke sowie Induktivitäten und Kapazitäten.

Die Eingliederung der Netzwerkelemente wird dann offenbar stets möglich sein, wenn sich die Elemente über eine äquivalente oder näherungsweise gültige wellenmäßige Ersetzung durch Elementarleitungen darstellen lassen. Für die zunächst behandelte Mehrfachleitung der Verzögerungszeit T ist dabei

eine äquivalente Ersetzung möglich, dagegen ist die Darstellung von Induktivitäten und Kapazitäten durch kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Elementarleitungen nur näherungsweise gültig. Homogene Leitungsstücke mehrfacher Elementarleitungslänge können unmittelbar berücksichtigt werden, da sie ja jeweils als eine Kette von gleichen Elementarleitungen dargestellt werden können. Es zeigt sich jedoch, daß die beschreibenden Gleichungen für Leitungsnetzwerke mit homogenen Leitungsstücken mehrfacher Elementarleitungslänge eine einfachere Gestalt annehmen, wenn das homogene Leitungsstück als eigenes Netzwerkelement berücksichtigt wird. Das setzt aber eine andere Auffassung der Netzwerkstruktur voraus, die nun nicht mehr in Stoßstellen und Elementarleitungen, sondern in Stoßstellen und homogene Leitungsstücke gegliedert wird.

5.2 Mehrfachleitungen

5.2.1 Definition der Mehrfachleitung

Eine aus w Leitern und einem Bezugsleiter bestehende dispersions- und verlustfreie Mehrfachleitung mit der Wellenwiderstandsmatrix $\underline{W}$ und der Verzögerungszeit T für die in einer Richtung durchlaufenden Wellen stellt einen klemmenzahlsymmetrischen Mehrpol (5/1) dar, der im s -Bereich mit der in Bild 5/1 gezeigten Bepfeilung durch die folgende, verallgemeinerte Kettenform der Leitungsgleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \cosh sT \underline{U}_2 - \sinh sT \underline{W} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \sinh sT \underline{W}^{-1} \underline{U}_2 - \cosh sT \underline{I}_2.\end{aligned}\tag{5/2.1}$$

Die je w Spannungen $U_{1(1)}, \dots, U_{1(w)}$ und $U_{2(1)}, \dots, U_{2(w)}$ und Ströme $I_{1(1)}, \dots, I_{1(w)}$ und $I_{2(1)}, \dots, I_{2(w)}$ an den Toren 1 und 2 sind dabei zu den Vektoren $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ zusammengefaßt.

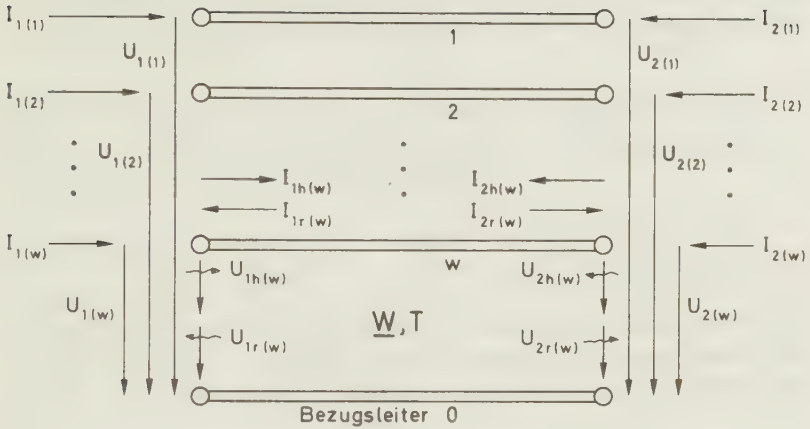


Bild 5/1: Die Elementar-Mehrfachleitung

Die Matrizen-Gleichungen der idealen Mehrfachleitung sind formal wie die Skalar-Gleichungen der Doppelleitung aufgebaut. Wird für Gl.(5/2.1) der Spezialfall $w=1$, $\underline{W}=[Z]$ betrachtet, so ergibt sich die Definitionsgleichung Gl.(2/2.1) der Elementarleitung. In Analogie zu der durch Gl.(2/2.1) beschriebenen Doppelleitung wird die durch Gl.(5/2.1) definierte Mehrfachleitung auch als Elementar-Mehrfachleitung bezeichnet.

Die den Gleichungen Gl.(2/2.2) bis Gl.(2/2.10) der Doppelleitung entsprechenden Beziehungen für die Mehrfachleitung werden im folgenden kurz erläutert.

Die Spannungen und Ströme ergeben sich aus den Wellen durch

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_h + \underline{U}_r, \\ \underline{I} &= \underline{I}_h - \underline{I}_r.\end{aligned}\tag{5/2.2}$$

Die an einem Ort in gleicher Richtung laufenden Strom- und Spannungswellen stehen zueinander in der Beziehung

$$\underline{U}_{h,r} = \underline{W} \underline{I}_{h,r} \quad (5/2.3)$$

Für das Beispiel der Spannungswellen gibt

$$\begin{aligned} \underline{U}_h &= (\underline{U} + \underline{W} \underline{I})/2, \\ \underline{U}_r &= (\underline{U} - \underline{W} \underline{I})/2 \end{aligned} \quad (5/2.4)$$

die Umrechnung von Strömen und Spannungen auf Wellen an. Die Zuordnung der rücklaufenden Spannungswellen an einem Tor zu den hinlaufenden am anderen lautet im Zeitbereich

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1r}(t) &= \underline{u}_{2h}(t-T), \\ \underline{u}_{2r}(t) &= \underline{u}_{1h}(t-T) \end{aligned} \quad (5/2.5)$$

und damit im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1r} &= e^{-sT} \underline{U}_{2h}, \\ \underline{U}_{2r} &= e^{-sT} \underline{U}_{1h}. \end{aligned} \quad (5/2.6a)$$

Die Streumatrix der Elementar-Mehrfachleitung hat also die Form

$$\underline{S} = e^{-sT} \begin{bmatrix} \underline{O} & \underline{E} \\ \underline{E} & \underline{O} \end{bmatrix}. \quad (5/2.6b)$$

Die Einheitsmatrizen $\underline{E}$ sind von der Ordnung w . Bei idealen Leitern mit transversalen Feldern breiten sich alle Feldverteilungen mit derselben Ausbreitungskonstanten aus; die Beziehungen Gl.(2/2.7) bis Gl.(2/2.9) sind also auch bei idealen Mehrfachleitungen gültig.

Die reelle und symmetrische Wellenwiderstandsmatrix $\underline{W}$ läßt sich bei bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus der Matrix der magnetischen Induktivitäten $\underline{L}'$ oder der Matrix der

elektrischen Induktivitäten $\underline{K}'$ bestimmen (5/2); es gilt

$$\underline{W} = v \underline{L}' = \frac{1}{v} \underline{K}' . \quad (5/2.7)$$

Die Inverse von $\underline{K}'$ ist die Matrix der Maxwell'schen Teilkapazitäten $\underline{C}'$ (z.B. (5/3)), wobei die folgende Vorzeichenregelung für die Elemente von $\underline{C}'$ gebräuchlich ist:

$$\underline{K}'^{-1} = \underline{C}' = \begin{bmatrix} +C'_{11} & -C'_{12} & . & . & -C'_{1w} \\ -C'_{12} & +C'_{22} & . & . & -C'_{2w} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -C'_{1w} & -C'_{2w} & . & . & +C'_{ww} \end{bmatrix} . \quad (5/2.8)$$

Die positiv genommenen Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen von $\underline{C}'$ geben bei der betrachteten Mehrfachleitung die auf ihre Länge bezogenen Teilkapazitäten der w verschiedenen Leiter untereinander an. Wenn wir die Teilkapazität zwischen dem i -ten Leiter und dem mit Null bezifferten Bezugsleiter mit C'_{i0} ($i=1, \dots, w$) bezeichnen, so gilt für die Elemente der Hauptdiagonalen

$$C'_{ii} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^w C'_{ij} . \quad (5/2.9)$$

Sind die Teilkapazitäten der idealen Mehrfachleitung bekannt, so ist es leicht möglich, ein äquivalentes Widerstandsnetzwerk für die angepaßte Mehrfachleitung anzugeben. Bild 5/2 zeigt die von Amemiya in (5/4,5) beschriebenen Zusammenhänge: bei bekannter Ausbreitungsgeschwindigkeit v und bekannten Teilkapazitäten C'_{ij} erhält man die Widerstände R_{ij} zwischen den entsprechenden Klemmen des Ersatznetzwerkes für die angepaßte Mehrfachleitung zu

$$R_{ij} = \frac{1}{v C'_{ij}} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, w \\ j = 0, \dots, w \\ j \neq i . \end{array} \quad (5/2.10)$$

(Der Bezugsleiter ist mit Null beziffert).

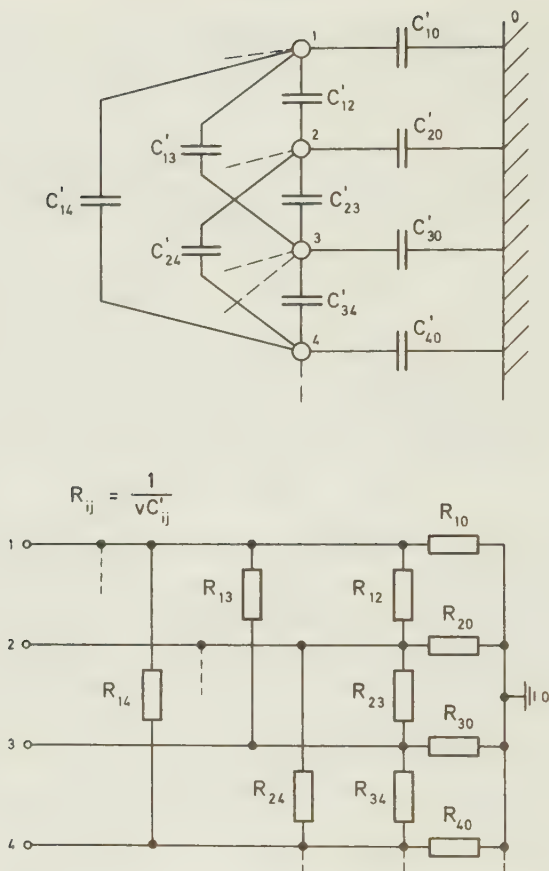
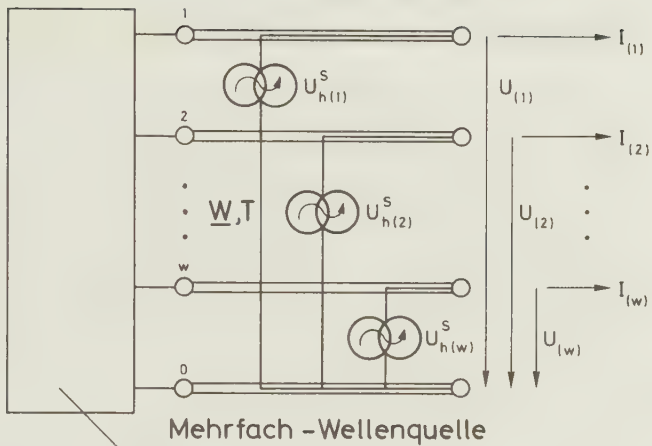


Bild 5/2: Anpassungsnetzwerk für Mehrfachleitungen

Für eine an die Mehrfachleitung angeschlossene Last stellt die generatorseitig angepaßt bzw. unendlich ausgedehnt gedachte Mehrfachleitung eine Wellenquelle dar, die in eine äquivalente konzentrierte Mehrfach-Spannungsquelle umgeformt werden kann. Bild 5/3 zeigt die Äquivalenz zwischen der als erweiterte Wellenquelle aufgefaßten Mehrfachleitung und dem von Amemiya in (5/5,6) beschriebenen Ersatzspannungsquellen-netzwerk.



Anpassungsnetzwerk

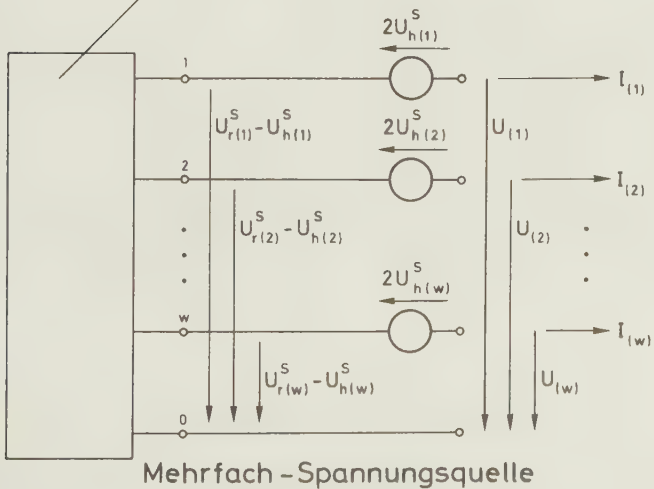


Bild 5/3: Zur Äquivalenz zwischen Mehrfach-Wellenquelle und Mehrfach-Spannungsquelle

5.2.2 Darstellung der Mehrfachleitung durch ein Bündel äquivalenter Elementarleitungen

Es stellt sich nun die Frage, wie die Mehrfachleitung durch Elementarleitungen dargestellt werden kann.

Der eine Weg besteht darin, die die Mehrfachleitungen beschreibenden gekoppelten Matrizengleichungen Gl.(5/2.1) in ein System entkoppelter Vierpolgleichungen zu überführen (5/7,8). Das System von w verkoppelten Leitern und dem Bezugsleiter kann man sich dann durch w entkoppelte Doppelleitungen ersetzt denken. Die Wellenwiderstände Z_i ($i=1, \dots, w$) der Doppelleitungen sind die Eigenwerte der Widerstandsmatrix $\underline{W}$; die entkoppelten Wellen sind die Eigenwellen der Mehrfachleitung. Für einen nichttrivialen Vektor $\underline{I}_h$ ist die in eine Leitung fließende Leistung positiv

$$\underline{I}_h^T \underline{W} \underline{I}_h = \underline{I}_h^T \underline{U}_h > 0 \quad , \quad (5/2.11)$$

d.h. die reelle und symmetrische Matrix $\underline{W}$ ist positiv definit; ihre Eigenwerte und damit die Wellenwiderstände Z_i der Ersatzleitungen sind also reell und positiv (5/9). Die transformierten Ströme $\hat{\underline{I}}$ und Spannungen $\hat{\underline{U}}$ an den Klemmen der Ersatzleitungen ergeben sich durch Multiplikation der ursprünglichen Ströme $\underline{I}$ und Spannungen $\underline{U}$ mit der Modalmatrix $\underline{M}$ (Eigenvektormatrix). Zur Erläuterung sei die Transformation auf die erste Teilgleichung von Gl.(5/2.1) angewandt; mit ersichtlichen Abkürzungen ergibt sich die transformierte Gleichung zu

$$\begin{aligned} \underline{M}\underline{U}_1 &= \cosh sT \underline{M}\underline{U}_2 - \sinh sT \underline{M}\underline{W} (\underline{M}^{-1}\underline{M}) \underline{I}_2 \quad , \\ \hat{\underline{U}}_1 &= \cosh sT \hat{\underline{U}}_2 - \sinh sT \underline{Z} \hat{\underline{I}}_2 \quad . \end{aligned} \quad (5/2.12)$$

Die Matrix $\underline{Z}$ ist eine Diagonalmatrix; die Elemente der Hauptdiagonalen sind die Wellenwiderstände Z_i der entkoppelten Doppelleitung. Die Streumatrix der Mehrfachleitung wird nicht verändert, sie ist auch für das Ersatzleitungsbündel gültig.

Von der prinzipiellen Möglichkeit der Ersetzung einer Mehrfachleitung durch ein Bündel entkoppelter, äquivalenter Elementarleitungen werden wir im folgenden absehen, weil sie umständlich und für die Ermittlung des Netzwerkverhaltens nicht erforderlich ist. Wir kennzeichnen stattdessen die Mehrfachleitung nur symbolisch durch ein Elementarleitungsbündel und ordnen dabei die Spannungen der verkoppelten Leiter formal den Spannungen der jeweiligen Ersatzleitung zu. Die symbolische Darstellung der Elementar-Mehrfachleitung durch w übliche Elementarleitungen hat den Vorteil, daß außer der bekannten Elementarleitung kein weiteres Netzwerkelement ausdrücklich in Erscheinung tritt.

5.2.3 Streumatrixbestimmung bei der Beteiligung von Mehrfachleitungen

Die besprochenen Verfahren zur Bestimmung der Streumatrix einer Stoßstelle mit angrenzenden Doppelleitungen lassen sich sinngemäß auf den Fall erweitern, daß die Tore mit Mehrfachleitungen beschaltet sind. Die Stoßstelle selbst wird dabei in Analogie zu der Bezeichnungsweise bei einer allgemeinen Verzweigung mit k angrenzenden Vieltyp-Wellenleitern der Mikrowellentechnik (2/3) als (k,n) -Tor aufgefaßt, wobei n die Anzahl der Ersatzleitungen im Ersatzschaltbild der Verzweigung angibt. Unter der Annahme, daß die einzelnen Wellenleiter je w_j Wellentypen führen (für die sich $2w_j$ Wellengrößen angeben lassen), werden über die Mikrowellenverzweigung insgesamt

$$n = \sum_{j=1}^k w_j \geq k \quad (5/2.13)$$

Wellentypen bzw. $2n$ zugehörige Wellengrößen miteinander verknüpft. Die Bezeichnung (k,n) -Tor soll darauf hinweisen, daß die n Wellentypen auf k Wellenleitern definiert sind. Für die hier vorliegenden speziellen Leitungsnetzwerke kommen dabei als Vieltypwellenleiter die TEM-Mehrfachleitungen mit den jeweils w_j hinlaufenden und w_j rücklaufenden Spannungswellen in Frage.

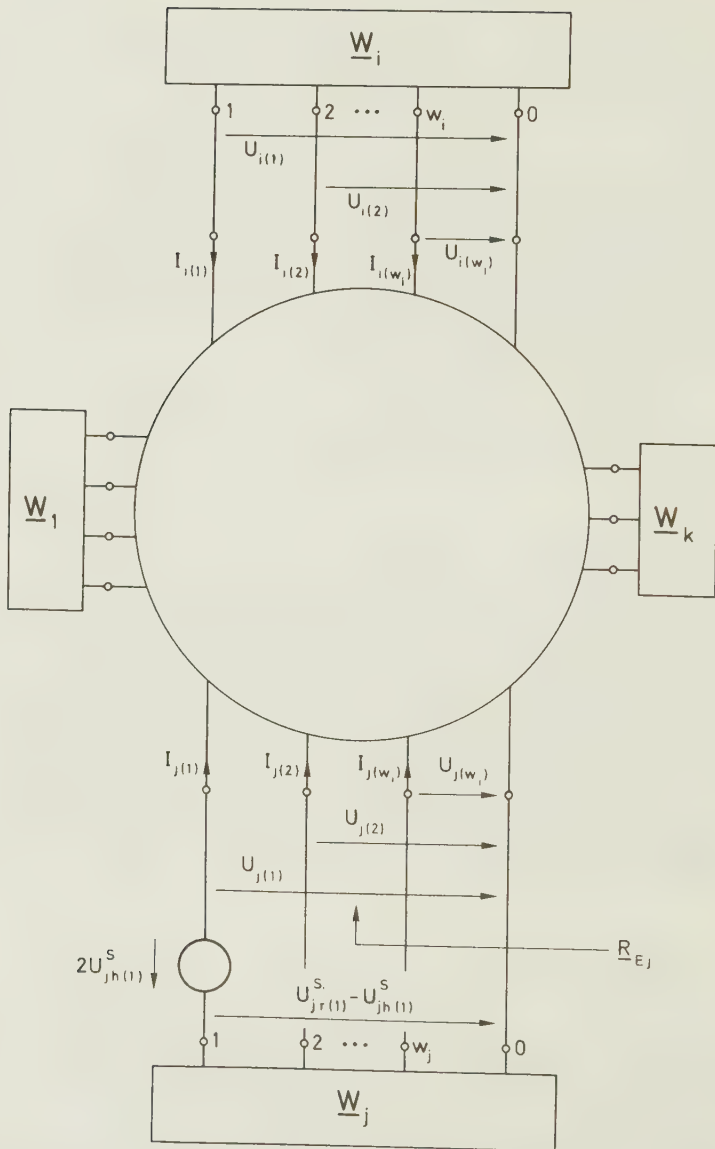


Bild 5/4: Zur Berechnung der Streukoeffizienten einer Stoßstelle bei der Beteiligung von Mehrfachleitungen

Unter Verwendung der Anpassungsnetzwerke bzw. Ersatzspannungsquellennetzwerke ist es bei den hier betrachteten Stoßstellen möglich, die gesuchten Wellenverhältnisse als Spannungsverhältnisse in konzentrierten Schaltungen zu bestimmen (5/6,7). Bild 5/4 zeigt den Fall, daß nur eine hinlaufende Spannungswelle auf die als (k,n) -Tor aufgefaßte Stoßstelle existiert, und zwar die Welle $U_{jh(1)}^S$ auf dem ersten der w_j Leiter der j -ten Mehrfachleitung. Die Spannungen an allen anderen Klemmen der an das Mehrtor angeschlossenen Anpassungsnetzwerke sind bereits die gesuchten, von der Stoßstelle rücklaufenden Wellen; lediglich die Spannung an der zugehörigen Klemme enthält noch einen hinlaufenden Wellenanteil (in dem betrachteten Fall von der Größe $-U_{jh(1)}^S$). Hat die hinlaufende Welle $U_{jh(1)}^S$ in der von 1 bis n laufenden Indizierung der Spannungswellen den Index ν , eine beliebige durch die hinlaufende Welle $U_{\nu h}^S$ hervorgerufene rücklaufende Welle $U_{\mu r}^S$ den Index μ , so ist der Quotient

$$S_{\mu\nu} = \frac{U_{\mu r}^S}{U_{\nu h}^S} \quad (5/2.14)$$

gerade einer der gesuchten n^2 Koeffizienten der Streumatrix $\underline{S}$ (bzw. $\underline{S}_{\text{ges}}$, falls das Mehrtor vollständig erweitert ist).

Entsprechend den k Mehrfachleitungen mit je w_j Wellentypen lassen sich die n Untertore und n hin- und rücklaufenden Wellen in k Gruppen zu je w_j Elementen einteilen. Dem entspricht eine Unterteilung der n -reihig quadratischen Streumatrix $\underline{S}$ in k^2 Untermatrizen. Die Untermatrix $\underline{S}_{ij}$ verknüpft die hinlaufenden Wellen $\underline{U}_{jh}^S$ der Torgruppe j mit den rücklaufenden Wellen $\underline{U}_{ir}^S$ der Torgruppe i (siehe Bild 5/4). Wenn nur an der Torgruppe j hinlaufende Wellen existieren, gilt

$$\underline{U}_{ir}^S = \underline{S}_{ij} \underline{U}_{jh}^S \quad ; \quad i, j = 1, \dots, k \quad (5/2.15a)$$

bzw. mit Gl.(5/2.4)

$$(\underline{U}_i - \underline{W}_i \underline{I}_i) = \underline{S}_{ij} (\underline{U}_j + \underline{W}_j \underline{I}_j) \quad (5/2.15b)$$

Speziell für den gleichen Torindex j ergibt sich mit der Eingangswiderstandsmatrix $\underline{R}_{Ej}$, definiert durch

$$\underline{U}_j = \underline{R}_{Ej} \underline{I}_j \quad , \quad (5/2.16)$$

die Eigenreflexionsmatrix $\underline{S}_{jj}$ zu

$$\underline{S}_{jj} = (\underline{R}_{Ej} - \underline{W}_j) (\underline{R}_{Ej} + \underline{W}_j)^{-1} \quad . \quad (5/2.17)$$

Für die Übertragung zwischen ungleichen Torgruppen gilt

$$-2\underline{W}_i \underline{I}_i = 2\underline{U}_i = \underline{S}_{ij} (\underline{R}_{Ej} + \underline{W}_j) \underline{I}_j \quad . \quad (5/2.18)$$

Für den wichtigen Sonderfall einer alleinigen Durchverbindung zwischen gleichartigen Torgruppen ist $\underline{U}_i = \underline{U}_j$, $\underline{I}_i = -\underline{I}_j$ und $\underline{R}_{Ej} = \underline{W}_i$; aus Gl.(5/2.18) folgt dann

$$\underline{S}_{ij} = 2\underline{W}_i (\underline{W}_i + \underline{W}_j)^{-1} \quad . \quad (5/2.19)$$

Sind die Strom-Spannungsmatrizen des passiven Mehrtors entsprechend Gl.(2/3.7) bekannt, so läßt sich die Streumatrix mit Hilfe von Gl.(2/3.8) berechnen, wenn für die Referenzmatrix $\underline{R}_0$ die Matrix

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} \underline{W}_1 & \underline{0} & \cdot & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{W}_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underline{0} \\ \underline{0} & \cdot & \underline{0} & \underline{W}_k \end{bmatrix} \quad . \quad (5/2.20)$$

eingesetzt wird, deren Untermatrizen aus den Wellenwiderstandsmatrizen der k Mehrfachleitungen bestehen.

Zur Verdeutlichung des Berechnungsverfahrens von Streumatrizen bei der Beteiligung von Mehrfachleitungen dient das in Bild 5/5 gezeigte Beispiel.

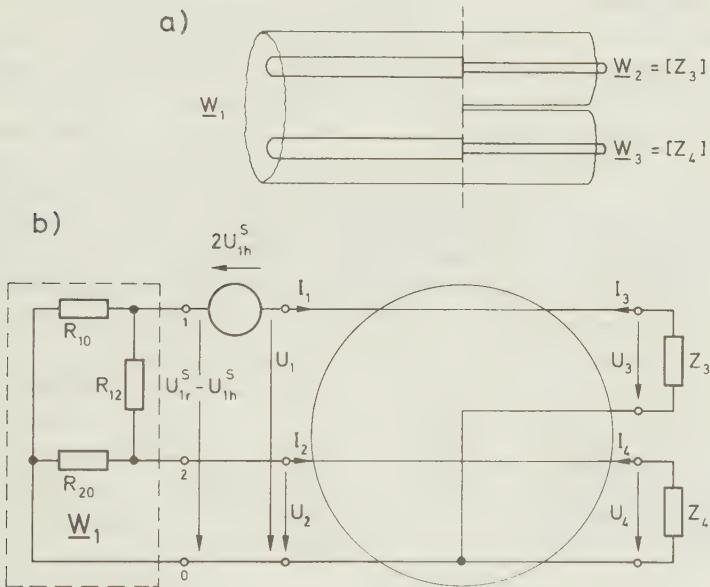


Bild 5/5: Übergang zwischen Koppelstrecke und Anschlußleitungen bei einem Richtkoppler

Die Schaltskizze in Bild 5/5a stellt den bei einem Richtkoppler vorliegenden Übergang der Richtkopplerstrecke in zwei entkoppelte Leitungen dar, wobei die Strecke selbst aus einer aus zwei verkoppelten Leitern bestehenden Mehrfachleitung aufgebaut ist. Bild 5/5b gibt die konzentrierte Schaltung zur Bestimmung der Elemente der ersten Zeile der durch die Gleichung

$$\underline{U}_r^S = \underline{S}_R \underline{U}_h^S \quad (5/2.21)$$

definierten Streumatrix $\underline{S}_R$ an. Die Widerstände R_{10} , R_{20} , R_{12} des Anpassungsnetzwerks für die Richtkopplerstrecke stehen mit dem Gleichtaktwellenwiderstand Z_{oc} bzw. dem Gegentaktwellenwiderstand Z_{od} des Richtkopplers (siehe (5/5,6)) in der Beziehung

$$R_{10} = R_{20} = Z_{oc} \quad , \quad (5/2.22a)$$

$$R_{12} = \frac{2Z_{oc} \cdot Z_{od}}{Z_{oc} - Z_{od}} \quad . \quad (5/2.22b)$$

Werden die Wellenwiderstände Z_3 und Z_4 der entkoppelten Anschlußleitung gleich Z_0 gewählt, so ergibt sich mit den Reflexionsfaktoren für die Gleich- und Gegentaktwelle, nämlich

$$r_c = \frac{Z_{oc} - Z_0}{Z_{oc} + Z_0} \quad , \quad (5/2.23a)$$

$$r_d = \frac{Z_{od} - Z_0}{Z_{od} + Z_0} \quad (5/2.23b)$$

und den Abkürzungen

$$r'_c = \frac{1}{2} r_c, \quad r'_d = \frac{1}{2} r_d \quad (5/2.23c)$$

für die Streumatrix $\underline{S}_R$ nach Zwischenrechnung die Gestalt

$$\underline{S}_R = \begin{bmatrix} -r'_c - r'_d & -r'_c + r'_d & 1 + r'_c + r'_d & r'_c - r'_d \\ -r'_c + r'_d & -r'_c - r'_d & r'_c - r'_d & 1 + r'_c + r'_d \\ 1 - r'_c - r'_d & -r'_c + r'_d & r'_c + r'_d & r'_c - r'_d \\ -r'_c + r'_d & 1 - r'_c - r'_d & r'_c - r'_d & r'_c + r'_d \end{bmatrix} \quad (5/2.24)$$

5.2.4 Auswirkungen auf die Beschreibung durch Zustandsgleichungen

Die Einfügung der durch Gl.(5/2.1) definierten Elementar-Mehrfachleitung in das Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke ist unmittelbar möglich, da die Leitung selbst formal als Elementarleitungsbündel dargestellt werden kann, und die bei der Beteiligung von Mehrfachleitungen entstehenden Stoßstellen wie die Stoßstellen des Grundmodells ebenfalls reelle Streukoeffizienten besitzen. Die Definitionsgleichung Gl.(3/2.13) der Zustandsvariablen der i-ten Elementarleitung kann entsprechend auf Mehrfachleitungen angewandt werden, wenn als Elementarleitung die betreffende Er-satzleitung der Mehrfachleitung eingesetzt wird. Die j-te Mehrfachleitung aus w_j Leitern und einem Bezugsleiter trägt dabei mit $2w_j$ Komponenten entsprechend den $2w_j$ an den Toren rücklaufenden Leitungswellen $\underline{u}_{2j,r}$ und $\underline{u}_{2j-1,r}$ zu dem Zustandsvektor $\underline{x}$ bei. Die interessierenden Ausgangsgrößen der j-ten Mehrfachleitung sind die Komponenten der Torspannungen $\underline{u}_{2j}$ und $\underline{u}_{2j-1}$, die zu der mit dem Symbol N bezeichneten Gruppe der Ausgangsgrößen der in Gl.(3/2.25) aufgeführten zweiten Zustandsgleichung gehören.

5.3 Induktivitäten und Kapazitäten

5.3.1 Darstellung von Induktivitäten und Kapazitäten durch kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Elementarleitungen

Der Eingangswiderstand $R_{EI}(s)$ einer kurzgeschlossenen Elementarleitung des Wellenwiderstandes Z_I lautet bekanntlich

$$R_{EI}(s) = \frac{U_I(s)}{I_I(s)} = Z_I \tanh sT \quad (5/3.1b)$$

und der Eingangsleitwert G_{EK} einer leerlaufenden Elementarleitung des Wellenwiderstandes Z_K

$$G_{EK}(s) = \frac{I_K(s)}{U_K(s)} = \frac{1}{Z_K} \tanh sT \quad . \quad (5/3.1b)$$

Der Vergleich mit dem Widerstand sL einer Induktivität L bzw. dem Leitwert sC einer Kapazität C zeigt, daß für kleine Werte der Variablen sT eine Kapazität C näherungsweise durch eine leerlaufende, bzw. eine Induktivität L durch eine kurzgeschlossene Elementarleitung ersetzt werden kann. Der Fehler ist umso kleiner, je weniger Glieder der Reihenentwicklung

$$\tanh sT = (sT) - \frac{1}{3}(sT)^3 + \frac{2}{15}(sT)^5 - \dots; |sT| < \frac{\pi}{2} \quad (5/3.2)$$

berücksichtigt werden müssen, je kleiner also sT ist. Wird die Reihe bereits nach dem ersten Glied abgebrochen, so gilt die Zuordnung

$$Z_I = \frac{L}{T} \quad (5/3.3a)$$

bzw.

$$Z_K = \frac{T}{C} \quad . \quad (5/3.3b)$$

Andererseits kann aber auch die Variable

$$\xi = \frac{1}{T} \tanh sT = \frac{1}{T} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad (5/3.4)$$

als neue Frequenzvariable aufgefaßt werden, wobei die durch Gl.(5/3.4) ausgedrückte Transformation der Richardstransformation (4/2) bzw. der bilinearen z -Transformation entspricht. Die durch Gl.(5/3.3) festgelegten Größen Z_I und Z_K stellen dann "Induktivitäten" bzw. "Kapazitäten" im ξ -Bereich dar.

5.3.2 Bedeutung der Ersatzschaltungen für das Zeitverhalten

Da die in dieser Arbeit entwickelte Beschreibung von Leitungsnetzwerken durch Zustandsgleichungen vorwiegend für die Erstellung eines automatischen Rechenverfahrens zur Analyse des Zeitverhaltens ausgenutzt werden soll, ist besonders die Bedeutung der Ersatzschaltungen für den Zeitbereich von Interesse.

Allgemein wird der bei einer Kapazität bzw. einer Induktivität vorliegende Integrationsvorgang im s-Bereich durch

$$F_2(s) = \frac{1}{s} F_1(s) \quad (5/3.5a)$$

bzw. im Zeitbereich durch

$$f_2(t) = \int_c^t f_1(\tau) d\tau \quad (5/3.5b)$$

beschrieben.

Wird die Variable s durch die Variable ξ gemäß Gl.(5/3.4) ersetzt, so lautet die entsprechende Integrationsbeziehung im z-Bereich

$$G_{2*}(z) = T \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} G_{1*}(z) . \quad (5/3.6a)$$

Durch Umformung von Gl.(5/3.6a) ergibt sich

$$G_{2*}(z) = z^{-2} G_{2*}(z) + \left(G_{1*}(z) + z^{-2} G_{1*}(z) \right) T$$

und daraus durch Rücktransformation in den Zeitbereich

$$g_2(kT) = g_2(k-2)T + \left(g_1(kT) + g_1(k-2)T \right) T. \quad (5/3.6b)$$

Der Vergleich von Gl.(5/3.6b) mit Gl.(5/3.5b) ergibt den bekannten Sachverhalt, daß bei der Anwendung der bilinearen Transformation statt der kontinuierlichen Integration von Zeitfunktionen eine Integration nach einer Trapez-Formel erfolgt. Um den Fehler bei der Integration klein zu halten, darf sich innerhalb der Zeit T die zu integrierende Größe nur wenig ändern. Das bedeutet für den Frequenzbereich, daß die Variable ξ näherungsweise durch die Variable s ersetzt werden kann. Wie Gl.(5/3.2) zeigt, muß daher bei der wellenmäßigen Darstellung von Induktivitäten und Kapazitäten die in Gl.(2/2.9) definierte elektrische Länge $\Theta = \omega T$ der Ersatzleitung klein genug gewählt werden.

5.4 Homogene Leitungsstücke

5.4.1 Vorbemerkungen

In dem bisher entwickelten Grundmodell der betrachteten Leitungsnetzwerke wird ein homogenes Leitungsstück vielfacher Elementarleitungslänge wie eine Zusammenschaltung von Elementarleitungen behandelt. Die Struktur dieser Zusammenschaltung wird dabei als Kette von Stoßstellen und Elementarleitungen beschrieben, obwohl innerhalb der Kette keine physikalischen Stoßstellen vorliegen. Ist ein Leitungsnetzwerk vorwiegend aus derartigen Leitungsstücken aufgebaut, so erscheint die Verwendung des bisher benutzten Modells unzumutbar zu sein, und es stellt sich die Frage, wie das Grundmodell zu erweitern ist, um homogene Leitungsstücke vielfacher Elementarleitungslänge besser berücksichtigen zu können.

Sollen die Zustandsgleichungen auf einem Digitalrechner ausgewertet werden, so ist beispielsweise der benötigte Speicherbedarf von Interesse. Um eine grobe Abschätzung des Einflusses von homogenen Leitungsstücken auf das Anwachsen der Elementanzahl der Matrizen und Vektoren zu erhalten, ersetzen wir in einem Gedankenexperiment alle Elementarleitungen eines gegebenen Netzwerks durch homogene Leitungsstücke gleicher vielfacher Elementarleitungslänge. Dadurch steigt die Elementanzahl des Zustandsvektors $\underline{x}$ bzw. des Variablenvektors $\underline{y}$ linear an, die der Systemmatrix $\underline{A}$ bzw. der verallgemeinerten Streumatrix $\underline{\Sigma}$ jedoch quadratisch. Da aber physikalisch keine neuen Stoßstellen entstanden sind, sind die Wellen auf den Leitungen nach wie vor noch über die ursprünglichen Stoßstellen und damit über die ursprüngliche Streumatrix $\underline{\Sigma}$ verknüpft.

Die Erweiterung des Grundmodells muß also darauf abzielen, die Elementarleitung als Strukturelement durch homogene Leitungsstücke mehrfacher Elementarleitungslänge zu ersetzen. Die verallgemeinerte Streumatrix $\underline{\Sigma}$ ist dann nur noch durch die physikalisch relevanten Stoßstellen bestimmt, sowie durch diejenigen Stoßstellen, die von der wellenmäßigen Ersetzung von Quellen, Widerständen usw. herrühren. Ihr Grad hängt daher

direkt nur noch von der Anzahl der homogenen Leitungsstücke und nur noch indirekt von der Anzahl der Elementarleitungen selbst ab. Wird die Erweiterung in diesem Sinn durchgeführt, so ändert sich aber die verallgemeinerte Streumatrix $e^{-sT} \underline{K}$, die die Zeitverzögerung der Leitungswellen beschreibt, da nun die verschiedenen Leitungen unterschiedliche Verzögerungen besitzen. Die Auswirkungen der veränderten Strukturauffassung auf die das Netzwerk beschreibenden Gleichungen werden im folgenden diskutiert.

5.4.2 Auswirkungen der veränderten Strukturauffassung

Die veränderte Strukturauffassung gliedert die betrachteten Leitungsnetzwerke in Stoßstellen und homogene Leitungsstücke, wobei das i -te Leitungsstück aus b_i gleichen Elementarleitungen aufgebaut ist und demnach die Zeitverzögerung $b_i T$ für eine in einer Richtung hinlaufende Welle besitzt. Für die Leitungswellen an den mit den Indizes $2i$ und $2i-1$ beziffernten Toren des i -ten Leitungsstückes gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} u_{2i-1,r}^L(t) &= u_{2i,h}^L(t-b_i T) \quad , \\ u_{2i,r}^L(t) &= u_{2i-1,h}^L(t-b_i T); \end{aligned} \quad (5/4.1a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} u_{2i-1,r}^L(t) &= u_{2i,h}^L(t-c_{2i-1} T) \quad , \\ u_{2i,r}^L(t) &= u_{2i-1,h}^L(t-c_{2i} T) \quad . \end{aligned} \quad (5/4.1b)$$

In Gl.(5/4.1b) ist die Bezeichnung

$$c_{2i-1} = c_{2i} = b_i \quad (5/4.2)$$

eingesetzt.

Für die Gesamtheit aller homogener Leitungsstücke vielfacher Elementarleitungslänge ergibt sich in vereinfachter Vektorschreibweise der Ausdruck

$$\underline{u}_{Mr}^L(t) = \underline{K} \underline{u}_{Mn}^L(t - c_i T), \quad (5/4.3)$$

wobei der Laufindex i nicht mehr zur Numerierung der Leitungsstücke, sondern zur Numerierung der Torwellen benutzt wird. Unter Verwendung der Diagonalmatrix diag ($e^{-c_i s T}$), deren Hauptdiagonalelemente nach Gl.(5/4.2) paarweise gleich sind, lautet die zugeordnete Streumatrixdarstellung

$$\underline{U}_{Mr}^L = \underline{\text{diag}}(e^{-c_i s T}) \underline{K} \underline{U}_{Mn}^L. \quad (5/4.4)$$

Die hergeleiteten Zustandsgleichungen für das Grundmodell werden zu beschreibenden Gleichungen für das erweiterte Modell, wenn in den Argumenten der Gleichungen der Variablen T durch den Term $c_i T$ ersetzt wird. Die erste Zustandsgleichung geht dann beispielsweise über in

$$\underline{x}((k+c_i)T) = \underline{A} \underline{x}(kT) + \underline{B} \underline{u}(kT), \quad (5/4.5a)$$

bzw. in

$$\underline{x}(t+c_i T) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t), \quad (5/4.5b)$$

wenn die Variable t nicht diskretisiert ist.

Von späterem Interesse sind die den Zustandsgleichungen zugeordneten Beziehungen Gl.(3/2.44) und Gl.(3/2.45). Sie lauten in veränderter Form

$$\underline{v}(t+c_i T) = \underline{K} \underline{\Sigma} \underline{v}(t) + \underline{v}'(t+c_i T), \quad (5/4.6)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{K} \left(\underline{v}(t+c_i T) - \underline{v}'(t+c_i T) \right) + \underline{v}(t). \quad (5/4.7)$$

Bei der automatischen Auswertung der Gl.(5/4.6) zur Bestimmung des Zeitverhaltens der betrachteten Leitungsnetzwerke wird der Variablenvektor $\underline{v}$ als Matrix aufgefaßt, dessen Spaltenzahl durch den größtmöglichen Wert $c_{\max}$ der vorkommenden Größen c_i bestimmt wird. Zum Vergleich des benötigten Speicherplatzes knüpfen wir an das im vorherigen Abschnitt erläuterte Gedankenexperiment an: bei der Ersetzung der Elementarleitungen durch homogene Leitungsstücke gleicher Länge steigt nun nur noch der Speicherplatz für den Variablenvektor $\underline{v}$ linear mit $c_{\max}=c_i$ an, während der Speicherplatz für die Matrix $\underline{K \Sigma}$, der dort quadratisch wächst, hier unverändert bleibt. Der Vorteil der günstigeren Speicherausnutzung bleibt, wie leicht nachgeprüft werden kann, selbst dann noch erhalten, wenn lediglich eine der vorkommenden Leitungen aus einem homogenen Leitungsstück vielfacher Elementarleitungslänge besteht.

Ein wichtiger Anwendungsfall, bei dem die aufgezeigten Vorteile der getrennten Berücksichtigung von homogenen Leitungsstücken vielfacher Elementarleitungslänge besonders augenfällig sind, besteht bei der Behandlung von Leitungsnetzwerken, die reaktive Elemente enthalten: die gestellte Forderung nach einer möglichst kleinen elektrischen Länge der als Ersatzleitung dienenden Elementarleitung kann nun ohne größere Schwierigkeiten durch eine dicht genug gewählte Unterteilung der vorliegenden Leitungen in einzelne Elementarleitungsabschnitte erfüllt werden.

6. Untersuchung des Zeitverhaltens mit dem Digitalrechner

6.1 Allgemeines

Über die Bestimmung des Zeitverhaltens von Leitungsnetzwerken sind in der Literatur eine Vielzahl von Arbeiten bekannt ($4/16, \dots, 28$) und ($6/1, \dots, 12$), um nur einige zu nennen, die sich jedoch vorwiegend mit der Untersuchung spezieller Bausteine und einzelner Schaltungen, weniger aber mit der Untersuchung allgemeiner Anordnungen beschäftigen. Im Vordergrund stehen oft Probleme aus den speziellen Anwendungsgebieten, typisch sind z.B. die Themen: Wanderwellen in der Energietechnik, Nebensprechen in der Fernsprechtechnik, Impulsstörungen und Kopplungen in der Digital- und Impulstechnik, Einschwingverhalten von Leitungsfiltern und Richtkopplern in der Hochfrequenztechnik usw. Im folgenden Abschnitt wird exemplarisch auf einige wichtige Prinzipien bei der Bestimmung des Zeitverhaltens von Leitungsnetzwerken eingegangen. Im Anschluß daran wird ein neuartiges, universelles Rechenmodell für die digitale Simulation der hier betrachteten Leitungsnetzwerke vorgestellt und abschließend zur Behandlung von einigen Beispielen eingesetzt.

6.2 Wichtige Prinzipien bisheriger Verfahren

6.2.1 Der Impulsfahrplan von Bewley

Zur Behandlung von Wanderwellenproblemen der Energietechnik ist von Bewley (6/1) ein Verfahren entwickelt worden, das mit einem als Impulsfahrplan aufzufassenden Weg-Zeit-Diagramm arbeitet. Ausgezeichnete Koordinatenwerte auf der Distanzachse sind Vielfache der Leitungsgrundlänge l , wodurch die Lage der Leitungsabschlüsse bzw. der Stoßstellen markiert wird, und auf der Zeitachse Vielfache der Laufzeit T . Von den zugehörigen Schnittpunkten im Diagramm gehen Geraden aus, deren absolute Steigung gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v=l/T$ ist. Die Geraden, die dem Diagramm ein

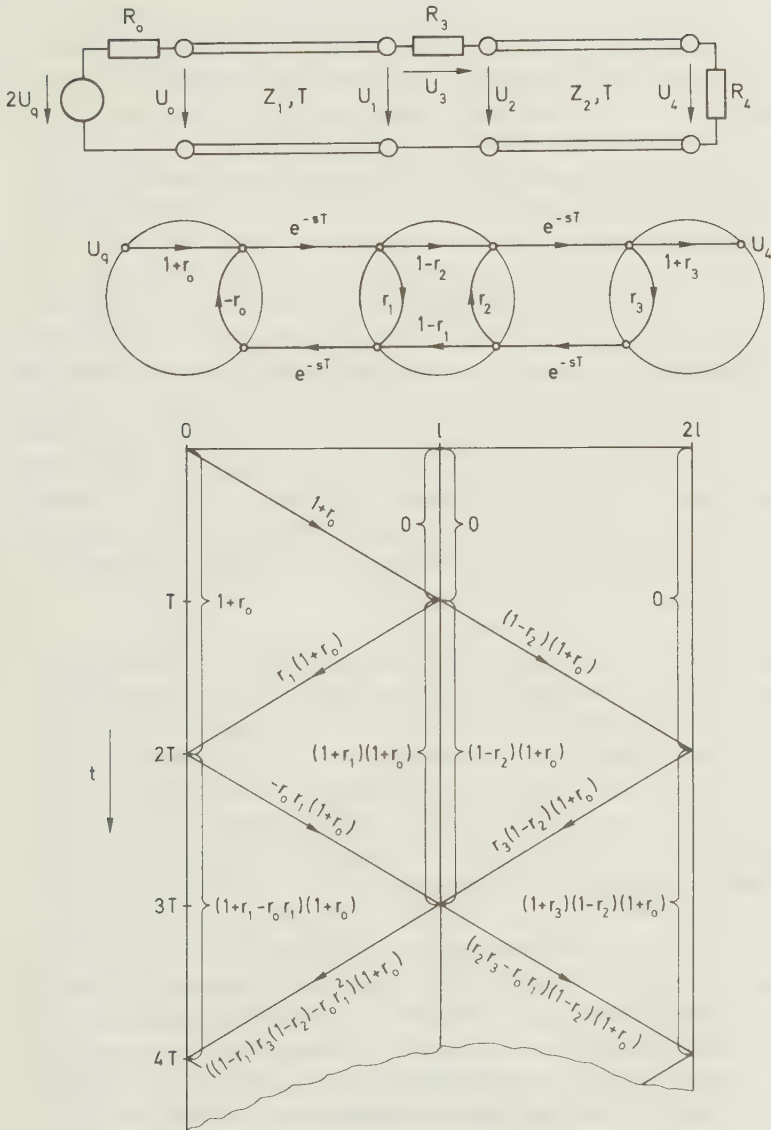


Bild 6/1: Beispiel für das Arbeiten mit dem Impulsfahrplan

gitterförmiges Aussehen verleihen (reflection lattice (6/1)), verkörpern die Spuren der sich durch fortgesetzte Reflexionen verändernden Wanderwellen. Die Amplituden der Wellen werden numerisch oder algebraisch dem Geradenstück zugeordnet, das zu der betreffenden Welle gehört. Über eine Amplitudenbilanz ist es bei sprungförmig vorausgesetzter Erregung nun jederzeit möglich, den momentanen Wert der Spannung bzw. des Stromes an einem beliebigen Leitungsort festzustellen.

Die Anwendung des Impulsfahrplans wird in Bild 6/1 für das in dieser Arbeit wiederholt zu Erläuterungen herangezogene Schaltbeispiel aus Bild 2/6 verdeutlicht. Um die Betrachtung zu erleichtern, sind noch außer dem Impulsfahrplan die betreffende Schaltung und der die Übertragung U_4/U_q kennzeichnende Signalfußgraph aus Bild 3/3 angegeben. Die geschweiften Klammern umfassen Zeitabschnitte, zu denen an den angegebenen Orten für die Spannungen u_0 , u_1 , u_2 und u_4 die aufgeführten Werte vorliegen; die Amplitude der erregenden Sprungwelle ist auf Eins normiert.

Ein direktes numerisches Analogon zum Impulsfahrplan ist das in (6/2) beschriebene Rechenschema (methode du tableau), bei dem in einer Tafel chronologisch die Wellenamplituden aufzuführen und dann aufzusummieren sind. Der Rechenplan wird allerdings nur in verbaler und exemplarischer Form dargeboten. Eine strenge algorithmische Formulierung, die unmittelbar als Grundlage eines automatisch auswertbaren Rechenprogrammes dienen könnte, ist nicht angegeben.

Eine ausgiebige Verwendung des Impulsfahrplans findet sich bei Seitzer in (4/23,...,26). Für den Sonderfall einer sprungförmig erregten Kaskade von Elementarleitungen, die als Modell eines inhomogenen Leitungsstückes dient, gibt er in (4/26) eine für den Digitalrechner geeignete Behandlung des zugehörigen Impulsfahrplans an. Seitzer stellt die Vorgänge im Diagramm mathematisch als Produkt von Matrizen dar, wobei die Systemeigenschaften nicht wie bei der Beschreibung mit Zustandsgleichungen durch eine,

sondern durch zwei Matrizen gekennzeichnet werden. Bei fortlaufender Numerierung der Stoßstellen enthält die eine Matrix die Streukoeffizienten der ungeradzahlgigen, die andere diejenige der geradzahlgigen Stoßstellen. Die Variablen sind die Wanderwellen, wobei zu jeder Elementarleitung nur eine Variable gehört. Wie der Impulsfahrplan in Bild 6/1 zeigt, dreht sich die Laufrichtung einer Welle zu den Zeitpunkten kT ; für gerade Zeitpunkte ist der Reflexionsort eine ungeradzahlige und für ungerade Zeitpunkte eine geradzahlige Stoßstelle, wenn die erregende Urwelle zur Zeit $t=0$ die mit 1 bezifferte Stoßstelle verläßt. Für die Wellenamplituden gelten also je nach betrachtetem Zeitpunkt zwei verschiedene Verknüpfungsgleichungen. Die zugehörigen zwei Matrizen lassen sich aber nur aufstellen, wenn sich geradzahlige und ungeradzahlige Stoßstellen beim Durchlauf einer Welle stets abwechseln, d.h. eine direkte Verbindung zwischen Stoßstellen gleicher Indexart nicht vorliegt. Eine Erweiterung des von Seitzer angegebenen Algorithmus auf allgemeinere Netzwerke ist daher nicht möglich.

Eine elementare Beschreibung der Überkopplung von Impulsen zwischen zwei parallelen Leitungen mit Hilfe des Impulsfahrplans ist von Hilberg (6/3) bekannt geworden; eine Bestimmung des Zeitverhaltens mit dem Digitalrechner ist jedoch in seiner Arbeit nicht beabsichtigt.

Für Leitungsnetzwerke mit nicht äquidistanten Stoßstellen läßt sich ebenfalls ein Impulsfahrplan konstruieren, dessen Spurlinien sich allerdings mit der Zeit stark auffächern. Für den Spezialfall zweier sprungförmig von einer Quelle erregten Leitungen, die an beliebigen Stellen mit Widerständen belastet sein können, hat Wassel in (4/22) ein umfangreiches mathematisches Modell des zugehörigen Impulsfahrplans vorgestellt. Er kommt zu einer rekursiven Formel für die Spannung an einem weiter außen liegenden Widerstand in Bezug auf die Spannung des zuvor liegenden Widerstandes, wobei die vermittelnden Faktoren aus Produkten einer Vielzahl endlicher und unendlicher Reihen bestehen, die ihm nur

eine näherungsweise Behandlung des Modells auf dem Digitalrechner erlauben. Wenn man davon ausgeht, daß die Abstände der Stoßstellen Vielfache einer kleinsten Einheit sind, was technisch gerechtfertigt ist, läßt sich das eben betrachtete spezielle Netzwerk auch mit dem in dieser Arbeit vorgestellten allgemeinen Verfahren untersuchen. Zusätzlich ergibt sich dann der Vorteil, nicht nur auf die Sprungfunktion als einzig mögliches Eingangssignal angewiesen zu sein.

6.2.2 Die Methode von Bergeron

Die Methode von Bergeron, auch Methode Schnyder-Bergeron genannt, ist ein graphisches Verfahren, das von Schnyder (6/4) und Bergeron (6/5) ursprünglich zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen in Druckleitungen entwickelt wurde. Die Anwendung für elektrische Vorgänge wird schon inzwischen in der für die Lehre bestimmten Literatur, z.B. (6/2), (6/6) und (6/7) behandelt, wobei (6/7) speziell auf ein kombiniertes Bewley-Bergeron-Verfahren eingeht. Eine Algebraisierung des Verfahrens und seine Auswertung mit dem Digitalrechner werden von Frey und Althammer (6/8), sowie von Arlett und Murray-Shelley (6/9) angegeben, die das Verfahren zur Behandlung starkstromtechnischer Übertragungsprobleme einsetzen.

Die Methode von Bergeron arbeitet im Gegensatz zum Impulsfahrplan nicht mit einem Weg-Zeit-Diagramm, sondern mit einem Strom-Spannungsdiagramm. Das Verfahren geht von der Tatsache aus, daß sich auf einer (Elementar-) Leitung mit dem konstanten Wellenwiderstand Z die hin- und rücklaufenden Wellen während des Durchlaufens nicht verändern. Dieses Verhalten wird entsprechend Gl.(2/2.4) durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} u + Zi &= \text{const}_h \\ u - Zi &= \text{const}_r \end{aligned} \quad (6/2.1)$$

ausgedrückt, die in einem i, u -Diagramm mit u als Ordinate zwei Geraden mit den Steigungen Z und $-Z$ beschreiben, wobei

die Gerade mit der positiven Steigung zu der rücklaufenden, die mit der negativen Steigung zu der hinlaufenden Leitungswelle gehört. Die Gesamtheit aller möglichen hin- und rücklaufenden Wellen einer Leitung wird demnach durch zwei Geradscharen gekennzeichnet, die sich im Vorzeichen der Steigung unterscheiden. Weitere geometrische Elemente des Diagramms sind die Strom-Spannungs-Kennlinien der konzentrierten Leitungsabschlüsse.

Wird eine Welle am Ort eines Leitungsabschlusses betrachtet, so gehorchen dort der Strom i und die Spannung u nicht nur der in Gl.(6/2.1) ausgedrückten Beziehung, sondern sind auch der Kennlinie des betrachteten Abschlusses unterworfen. Sind dort außerdem zu einem fixierten Zeitpunkt t die Strom-Spannungswerte bekannt (z.B. als Anfangswerte), so lassen sich die zu diesem Zeitpunkt gehörenden Punkte der Kennlinie (Startpunkte) angeben. Durch simultane Verfolgung der nun von den Leitungsabschlüssen wegwandernden Wellen erreicht man nach der allen (Elementar-)Leitungen gemeinsamen Laufzeit T zum Zeitpunkt $t+T$ wiederum einen Leitungsabschluß. Aus dem i,u -Diagramm gewinnt man die neuen, zu den nun erreichten Leitungsabschlüssen gehörenden Strom-Spannungswerte, die sich durch die Schnittpunkte der den wandernden Wellen zugeordneten Geraden mit den neuen Kennlinien ergeben, bzw. mit anderen Geraden, die zu den ebenfalls am neuen Ort eintreffenden Wellen gehören. Die neuen, dem Zeitpunkt $t+T$ zugeordneten Punkte des i,u -Diagramms werden jetzt als neue Startpunkte betrachtet, die Strom-Spannungswerte zum Zeitpunkt $t+2T$ ermittelt und so fort. Bei der automatischen Auswertung können z.B. die Schnittpunkte durch Lösen der entsprechenden Gleichungen der Diagrammlinien bestimmt werden (6/8).

Zur Veranschaulichung des Verfahrens ist in Bild 6/2 das Bergeron-Diagramm für das die vergangenen Abschnitte begleitende Schaltbeispiel aus Bild 2/6 angegeben. Um überschaubare Verhältnisse zu erreichen, sind, wie die angegebene Schaltung in Bild 6/2 zeigt, vereinfachende Annahmen

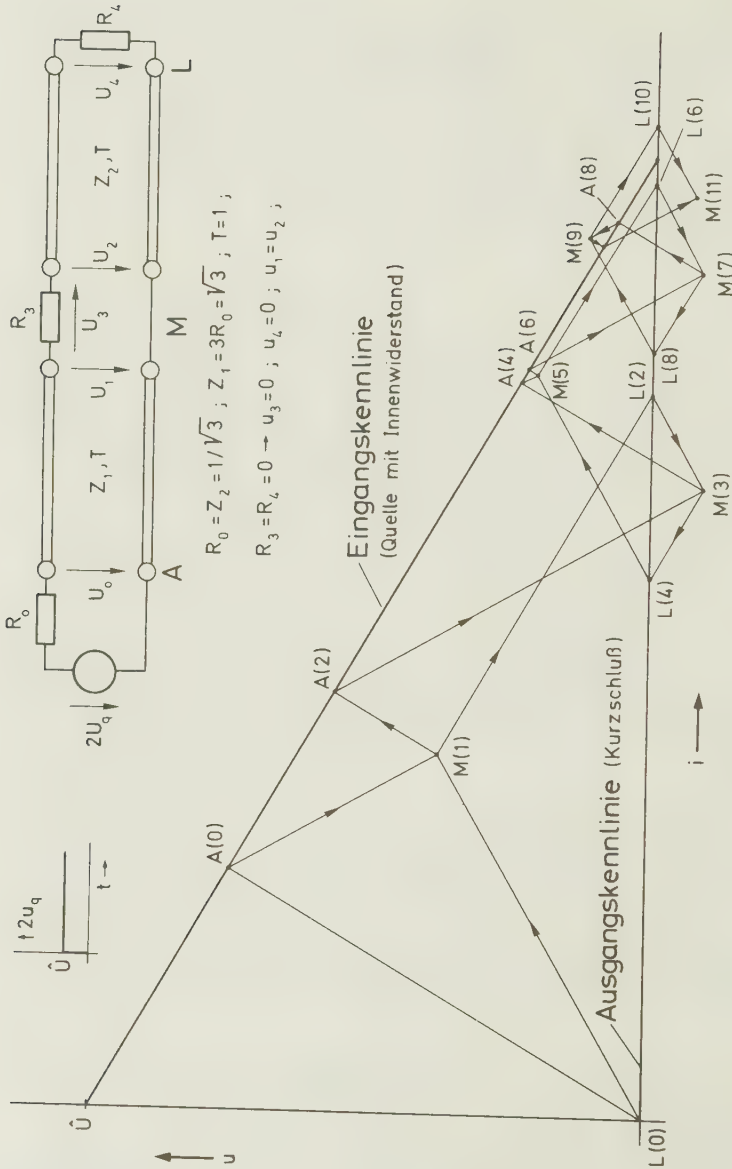


Bild 6/2: Das Bergeron-Diagramm einer einfachen Leitungsschaltung

für die Schaltelemente getroffen worden; außerdem ist eine Sprungerregung vorausgesetzt. Das Diagramm stützt sich auf (6/2) S. 75; dort findet sich auch eine ausführliche Erläuterung.

6.2.3 Die Faltung mit der Impulsantwort

Da die Impulsantwort $h(t)$ der hier betrachteten Leitungsnetzwerke gemäß Gl.(3/2.11) bzw. Gl.(4/3.3) aus einer gewichteten Folge von äquidistanten Impulsen

$$h(t) = h_{\star}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_0(t-kT) \quad (6/2.2)$$

besteht, läßt sich, wie Gl.(4/3.5) zeigt, die Ausgangsfunktion $y(t)$ unmittelbar als gewichtete Summe von zeitlichen Versetzungen der Eingangsfunktion $u(t)$ angeben:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u(t-kT) \quad . \quad (6/2.3)$$

Daß sich über die Aufsummierung schon bei einfachsten Netzwerken recht bizarre Einschwingvorgänge ergeben können, hat Schwarz (6/10) für den Fall einer beidseitig fehlabgeschlossenen (Elementar-)Leitung gezeigt. Bevor aber die Einschwingvorgänge diskutiert werden können, muß die Impulsantwort bekannt sein, deren Ermittlung bei komplizierten Netzwerken die Hauptschwierigkeit bildet.

Getsinger hat in einer Untersuchung über das Einschwingverhalten hochfrequenztechnischer Anordnungen (6/11) zwei Möglichkeiten hierzu angegeben, und zwar eine Näherungsmethode und den Weg über die Rücktransformation aus dem Frequenzbereich. Die näherungsweise Bestimmung der Impulsantwort vernachlässigt Reflexionen höherer Ordnung, wodurch sich, wie für mehrstufige Leitungstransformatoren gezeigt wird, leicht ein Näherungsausdruck finden läßt. Beim zweiten Verfahren werden die Koeffizienten der Impulsantwort aus der Potenz-

reihenentwicklung des Frequenzgangs ermittelt (s. Gl. (3/2.10a)). Als Anwendungsbeispiele werden achtpolige symmetrische Leitungskoppler behandelt, deren Frequenzgang noch mit Hilfe des Matrizenformalismus der Vierpoltheorie berechnet werden kann (6/13).

Zur Ermittlung von Übertragungsfunktionen und damit der Frequenzgänge beliebiger, d.h. auch unsymmetrischer Leitungsnetze führt Ross in (3/7) die Signalflußgraphenmethode ein und untersucht damit Schaltungen aus der TEM-Mikrowellentechnik ((3/7), (4/17)). Ross verwendet die in Gl. (3/2.10b) angegebene Potenzreihenentwicklung der von $z=e^{sT}$ abhängigen Übertragungsfunktion und erhält so die Koeffizienten der Impulsantwort. Bemerkenswert ist, daß die durch den Signalflußgraphen implizit gegebenen Zustandsgleichungen nicht erkannt werden und deshalb die weitaus einfachere Bestimmung des Zeitverhaltens über Matrizenverfahren verfehlt wird. Bemerkenswert ist noch ein zweiter Punkt. So elegant auch die Signalflußgraphenmethode ist, so versagt sie jedoch bei umfangreicheren Netzwerken, weil die manuelle Analyse des Signalflußgraphen mit der Masonformel zu kompliziert wird. Abhilfe kann hier nur ein automatisches Verfahren der Signalflußgraphenanalyse schaffen. Ein solches Verfahren wird in dieser Arbeit im achten Kapitel vorgestellt.

6.3 Entwicklung eines Analyseprogramms

6.3.1 Das verwendete mathematische Verfahren

Die Grundlage des mathematischen Verfahrens zur Bestimmung des Zeitverhaltens der betrachteten Leitungsnetze bilden die im Abschnitt 5.4 zur Beschreibung des erweiterten Grundmodells aufgestellten, durch Gl. (5/4.6) und Gl. (5/4.7) ausgedrückten Beziehungen

$$\underline{v}(t+c_1T) = \underline{K} \sum \underline{v}(t) + \underline{v}'(t+c_1T) \quad (6/3.1)$$

und

$$\underline{x}(t) = \underline{K} \left(\underline{v}(t+c_1T) - \underline{v}'(t+c_1T) \right) + \underline{v}(t) \quad (6/3.2)$$

Für die automatische Auswertung der Gleichungen mit dem Digitalrechner muß das kontinuierliche Argument t diskretisiert werden. Wir setzen

$$t = x\tau \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (6/3.3a)$$

wobei das Zeitinkrement τ ein ganzzahliger Bruchteil der Zeitdauer T sein muß, damit die erforderliche Verschiebung des Arguments um die Zeit $c_1 T$ wieder auf einen zulässigen Rasterpunkt führt:

$$\tau = T/a \quad ; \quad a \text{ ganzzahlig positiv} \quad . \quad (6/3.3b)$$

Die Diskretisierung ergibt

$$\underline{v}((x+ac_1)\tau) = \underline{K} \underline{\Sigma} \underline{v}(x\tau) + \underline{v}'((x+ac_1)\tau) \quad , \quad (6/3.4)$$

$$\underline{v}(x\tau) = \underline{K} \left(\underline{v}((x+ac_1)\tau) - \underline{v}'((x+ac_1)\tau) \right) + \underline{v}(x\tau) \quad . \quad (6/3.5)$$

Der Hauptteil des Programmaufwandes besteht in der Aufstellung der Gl.(6/3.4) und der sich daran anschließenden, fortlaufenden Bestimmung der Variablen $\underline{v}$. Da die für die Berechnung des Ausgangsvektors $\underline{v}$ nach Gl.(6/3.5) benötigten Werte der abhängigen Variablen $\underline{v}$ bzw. der unabhängigen Variablen $\underline{v}'$ bereits bei der Darstellung von Gl.(6/3.4) vorkommen, bedeutet die Ermittlung der Ausgangsgrößen lediglich eine vorzeichenrichtige Summation bereits bekannter Größen, wobei die durch die Multiplikation mit der Kommutierungsmatrix $\underline{K}$ symbolisierte Vertauschung zu beachten ist.

Gegenüber der unmittelbaren Verwendung der Zustandsgleichungen bieten die aus ihnen entwickelten Beziehungen für die Programmierung und Anwendung einige wesentliche Vorteile, die hier einmal kurz zusammengestellt werden sollen:

1. Statt der vier Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ braucht nur eine einzige Matrix, nämlich die Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$, aufgestellt zu werden; ihr Aufbau kann nach einem einheitlichen Verfahren erfolgen.

2. Für die Berechnung des Verhaltens wird im Kern nur die der ersten Zustandsgleichung entsprechende Beziehung benötigt.
3. Die besondere Berücksichtigung homogener Leitungsstücke c -facher Elementarleitungslänge durch das erweiterte Grundmodell wirkt sich in einer Verringerung des benötigten Speicherplatzes aus (siehe Abschnitt 5.4). Außerdem ergibt sich so die Möglichkeit, ohne großen Aufwand genügend kurze Laufzeiten für die Ersatzleitungen der Reaktanzen vorzusehen.
4. Durch die formale Zuordnung einer unabhängigen Variablen v_1' zu jeder abhängigen Variablen v_1 wird eine einfache Einführung der eingepprägten Quellgrößen ermöglicht.

Das Rechnen im engeren Raster Δt statt kT ist auch bei der Auswertung der für die betrachteten Leitungsnetzwerke hergeleiteten Zustandsgleichungen erlaubt, da die dort vorliegenden Leitungsspeicher kontinuierlich arbeiten. Eine Beschränkung auf die Berechnung der Werte im Raster kT ist nur dann erforderlich, wenn die zu untersuchenden Systeme mit diskreten Speichern der Speicherzeit T aufgebaut sind. Dieses Problem spielt eine besondere Rolle bei der im siebten Kapitel behandelten Simulation der Leitungsnetzwerke mit dem Analogrechner.

6.3.2 Automatischer Matrixaufbau

6.3.2.1 Vorbemerkungen

Für die automatische Auswertung der interessierenden Beziehungen Gl.(6/3.4) und Gl.(6/3.5) ist es außer der Kennzeichnung der Speicherplätze für die zu einer Matrix zusammengefaßten Vektoren $\underline{v}(\Delta t) \dots \underline{v}(\Delta t + \Delta t_{\max})$ im wesentlichen notwendig, die Matrix $\underline{K}$ innerhalb des Rechners darzustellen, wobei zwei Wege zu unterscheiden sind. Der im Sinne der Programmierung einfachste aber unbefriedigende Weg ist das

Einlesen der manuell aufgestellten Matrix. Schwieriger in der Programmierung, aber bequemer für den Benutzer ist eine automatische Aufstellung der Matrix durch den Rechner selbst, die sich hauptsächlich auf die eingelesene Struktur des Netzwerks stützt. Im folgenden soll auf den automatischen Matrixaufbau näher eingegangen werden.

Der in dieser Arbeit benutzte Weg ist in drei Schritte unterteilt. Der vorbereitende erste Schritt liegt in der Darstellung des Netzwerks durch ein Schaltbild, das nach bestimmten Regeln zu beziffern und zu bepfeilen ist. Im zweiten Schritt sind dann die Eigenschaften der vorliegenden Leitungen und Stoßstellen durch Kennzahlen zu klassifizieren und aufzulisten. Der dritte und letzte Schritt besteht in einer topologischen Beschreibung der Netzwerkstruktur.

6.3.2.2 Aufbereitung des Netzwerks

Das zu untersuchende Netzwerk ist zunächst nach den im Abschnitt 2.3.3 für die Beschreibung der modifizierten Netzwerkstruktur hergeleiteten Regeln darzustellen und zu beziffern, wobei an die Stelle der Elementarleitungen nun die homogenen Leitungsstücke treten. In dem so ermittelten Schaltbild sind Quellen und signifikante Widerstände durch ihr wellenmäßiges Ersatzbild dargestellt. Außerdem sind die Leitungen, die Stoßstellen und die Tore der Stoßstellen jeweils fortlaufend durchnummeriert, wodurch eine einheitliche Indizierung der an den Leitungstoren vorliegenden Spannungen nach dem im Abschnitt 2.3.3 dargelegten Verfahren ermöglicht wird.

Für die noch fehlende Bepfeilung der Torspannungen sind bisher noch keine eindeutigen Regeln festgelegt; es ist lediglich gefordert, daß die Spannungspfeile an den beiden Toren einer Leitung stets in gleicher, aber sonst beliebiger Richtung verlaufen müssen. Die im folgenden anzuwendende Bepfeilungsregel richtet sich nach den Stoßstellen, für deren verschiedene Typen katalogartig die vorzunehmende Bepfeilung festgelegt

ist. (Es ist durchaus möglich, daß die Pfeile an den Toren einer Leitung gegensinnig verlaufen.) Die einmal vereinbarte Bepfeilung der einzelnen Stoßstellentypen liegt auch den Unterprogrammen zu Grunde, die für jede Stoßstelle die zugehörige Streumatrix berechnen. Das dabei generell angewandte Prinzip besagt, daß die Bepfeilung so zu wählen ist, daß eine eingeprägte positive Spannung am ersten Tor der Stoßstelle zu positiven Spannungen an den anderen führt.

6.3.2.3 Kennzeichnung der Leitungen und Stoßstellen

Für jede Leitung sind folgende Kennwerte in den Digitalrechner einzugeben: Leitungsnummer, Leitungslänge, Leitungstyp.

Die Leitungslänge ist dabei auf die Länge der Elementarleitung bezogen. Sie entspricht der Größe b_1 aus Gl.(5/4.2) und muß demnach eine ganze Zahl sein. Durch das Vorzeichen der eingegebenen Größe wird die Bepfeilung der Leitung beschrieben; bei gleichsinniger Bepfeilung der Torspannungen ist das Vorzeichen positiv, anderenfalls negativ zu wählen.

Die Kennziffer des Leitungstyps gibt an, ob es sich beispielsweise um eine normale Doppelleitung oder um die Ersatzleitung einer Mehrfachleitung handelt. Je nach Kennziffer werden vom Rechner weitere Kennwerte aufgerufen, z.B. der Wellenwiderstand oder die Zeile und die Zeilenwerte der Wellenwiderstandsmatrix. Sollen statt der Wellenwiderstände Wellenleitwerte eingegeben werden, so ist die Typziffer mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Die Beschreibung der Stoßstellen geschieht durch die beiden Werte Stoßstellenummer und Stoßstellentyp, wobei je nach Typzahl weitere Kennwerte für den Streumatrixaufbau aufgerufen werden können. Durch die Typzahl wird dann später ein zugehöriges Unterprogramm angesprochen, das die Streumatrix der betreffenden Stoßstelle ermittelt, wozu außer den Wellenwiderständen der angrenzenden Leitungen gegebenenfalls noch die Werte von verborgenen Widerständen zu berücksichtigen sind. Es ist aber auch möglich, für die verschiedenen Stoßstellenarten direkt die Streumatrix bzw. die freien Streu-

parameter einzulesen. Ein mögliches anderes Verfahren zur Kennzeichnung einer Stoßstelle, das aber hier nicht realisiert ist, bestände in der vollständigen Angabe ihrer Topologie; die gesuchte Streumatrix wäre dann über ein Analyseprogramm des so beschriebenen Widerstandsnetzwerkes zu ermitteln. Vermutlich ist aber für den Benutzer die Angabe einer Typzahl bequemer als die Angabe der Topologie, was mit einer beschränkten, jedoch nach Bedarf stets erweiterungsfähigen Anzahl zulässiger Stoßstellenarten erkaufte wird. Mit dem hier aufgestellten Programm, das zur Zeit mit ca. zwanzig Typzahlen arbeitet, kann aber bereits ein Großteil der in der technischen Literatur anzutreffenden Stoßstellenarten behandelt werden.

6.3.2.4 Topologische Beschreibung der Netzwerkstruktur

Nachdem nun die Eigenschaften der einzelnen Leitungen und Stoßstellen bekannt sind, muß noch für den Aufbau der verallgemeinerten Streumatrix $\underline{\Sigma}$ bzw. $\underline{K \Sigma}$ die gegenseitige Verknüpfung der Leitungen und Stoßstellen gekennzeichnet werden. Die Beschreibung der Topologie kann für das realisierte Programm auf zwei verschiedene Arten erfolgen: entweder durch eine Liste der einzelnen Leitungen mit ihren angrenzenden Stoßstellen (Einleseart Hantel), oder durch eine Liste der einzelnen Stoßstellen mit ihren angrenzenden Leitungen (Einleseart Stern).

Die Einleseart Hantel benötigt außer der Angabe der Leitungsnummer für jede Leitung noch die beiden Datenpaare Stoßstellennummer und (Stoßstellen-)Tornummer der zwei angrenzenden Stoßstellen. Per Programm wird dann für jede Stoßstelle festgestellt, welche Leitungen angrenzen. Gleichzeitig wird ermittelt, welche der beiden Variablen v_{2i} und v_{2i-1} einer angrenzenden Leitung mit dem Index i für die Stoßstelle als unabhängige bzw. abhängige Variable wirkt. Diese Kenntnis ist erforderlich, um die Elemente der anschließend berechneten Stoßstellenstreumatrix in die Matrix $\underline{K \Sigma}$ einordnen zu können.

Bei der Einleseart Stern sind außer der Stoßstellenummer für jede Stoßstelle in beliebiger Reihenfolge die Wertepaare (Stoßstellen-)Tornummer und Nummer der angrenzenden Leitung anzugeben, wobei die Anzahl der Wertepaare gleich der Toranzahl der betreffenden Stoßstelle ist. Im Anschluß daran wird vom Rechner die Streumatrix der Stoßstelle aufgestellt, da außer den bereits eingegebenen Kennwerten der Stoßstelle nun auch die benötigten Werte der Wellenwiderstände bzw. Wellenleitwerte der angrenzenden Leitungen bekannt sind. Zum Abschluß werden dann die Elemente in die Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$ eingeordnet, nachdem durch eine vorhergehende Prüfung die Zuordnung zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen für jedes Tor der Stoßstelle festgestellt wurde.

6.3.2.5 Erläuterndes Beispiel

Zur Verdeutlichung der Ausführungen wird auf das begleitende Schaltbeispiel aus Bild 2/6 zurückgegriffen. Das aufbereitete Netzwerk ist bereits in Bild 2/12 zusammen mit dem bezifferten Strukturbild dargestellt; die dort gewählte Bepfeilung ist zulässig im Sinne der im Abschnitt 6.3.2.2 behandelten Vorschrift.

Für die rechnerische Behandlung werden vereinfacht folgende Zahlenwerte für die normierten Bauelemente gewählt: $R_0=R_q=3$, $Z_1=9$, $Z_2=8$ bzw. $Y_2=0.125$, $R_3=3$, $R_4=4$ (für die Reflexionsfaktoren $r_0 \dots r_3$ des kennzeichnenden Signalflußgraphen aus Bild 3/10 ergeben sich dann die Werte $r_0=1/2$, $r_1=1/10$, $r_2=1/5$, $r_3=-1/3$). Für die Eingabe der Leitungsdaten ist folgende Liste möglich:

4,	1,	1,	3
1,	1,	1,	9
3,	1,	1,	3
2,	1,	-1,	0.125 .

Die Beschreibung der Stoßstellen kann durch die Angabe

5, 10
1, 22
2, 34
4, 10
3, 121, 4

erfolgen. Dabei kennzeichnet die Typzahl 10 den Fall der Anpassung, die Typzahl 22 den Wellenwiderstandssprung, die Typzahl 34 die Parallelverbindung und die Typzahl 121 den Fall einer widerstandsbehafteten eintorigen Stoßstelle, für deren vollständige Kennzeichnung noch der Widerstandswert von R_4 anzugeben ist.

Die Beschreibung der Topologie in der Einleseart Stern kann beispielsweise wie folgt geschehen:

5, 1, 4
1, 2, 4, 1, 1
2, 3, 3, 1, 1, 2, 2
4, 1, 3
3, 1, 2 .

Falls die Einleseart Hantel benutzt wird, ist zur Kennzeichnung der Topologie folgende Datenliste möglich:

4, 5, 1, 1, 2
1, 1, 1, 2, 1
3, 4, 1, 2, 3
2, 2, 2, 3, 1 .

Bevor die aufgeführten Listen eingelesen werden können, sind noch einige Kenndaten für die Speicherreservierung wie Anzahl der Leitungen, Anzahl der Stoßstellen etc. anzugeben, die aber hier nicht interessieren. Die Listen selbst werden zur Kontrolle in geordneter Form wieder ausgedruckt; am Anschluß daran werden die von Null verschiedenen Elemente der Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$ protokolliert (für das behandelte Beispiel ist die Matrix $\underline{K} \underline{\Sigma}$ in allgemeiner Form auf Seite 80 angegeben). Im folgenden sind die entsprechenden Protokollausschnitte aufgeführt.

LISTEN UEBER DIE ART DER LEITUNGEN UND DER STOSS-STELLEN

ART DER LEITUNGEN

NRL	LANG	TYPL	ZE	WEITERE KENNWERTE (7L, YL)
1	1	1	1	+9.000000000# 000
2	1	-1	1	+1.250000000#-001
3	1	1	1	+3.000000000# 000
4	1	1	1	+1.000000000# 000

ART DER STOSS-STELLEN

NRS	TYPS	WEITERE KENNWERTE (RS,GS)
1	22	
2	34	
3	121	+4.000000000# 000
4	10	
5	10	

DIE STRUKTURANGABE ERFOLGT DURCH DIE LISTE DER EINZELNEN
STOSS-STELLEN UND IHRER ANGRENZENDE LEITUNGEN
EINLESEART EA=2 ,STERN, BEDEUTUNG A..TOR LIEGT AM ANFANG
DER LEITUNG F..TORLIEGT AM ENDE

NRS	TOR	NRL	TOR	NRL	TOR	NRL
1	1A	1	2A	4		
2	1E	1	2A	2	3A	3
3	1E	2				
4	1E	3				
5	1E	4				

DIE STRUKTURANGABE ERFOLGT DURCH DIE LISTE DER EINZELNEN
LEITUNGSSTUECKE UND IHRER ANGRENZENDE STOSS-STELLEN
(EINLESEART EA=1 ,HANTEL)

NRL	SANF	TANF	SEND	TEND
1	1	1	2	1
2	2	2	3	1
3	2	3	4	1
4	1	2	5	1

DER GRAD DER ERMITTELTEN MATRIX SMM IST M= 8

DIE VON NULL VERSCHIEDENEN ELEMENTE UND IHRE WERTE LAUTEN

ELEMENT	I, J	WERT
01,	02	+1.000000000*-001
01,	03	+9.000000000*-001
01,	05	+9.000000000*-001
02,	01	-8.000000000*-001
02,	07	+1.800000000# 000
03,	04	-3.333333333*-001
04,	02	+8.000000000*-001
04,	03	+2.000000000*-001
04,	05	-8.000000000*-001
06,	02	+3.000000000*-001
06,	03	-3.000000000*-001
06,	05	+7.000000000*-001
08,	01	+2.000000000*-001
08,	07	+8.000000000*-001

EIN-UND AUSGANGSGROSSEN

ANZAHL DER WELLENQUELLEN MEIN=1, (NQMAX= 1)

LAGE DER QUELLEN,MARKIERTE KNOTEN,TYP UND WEITERE KENNWERTE

NRQ	LTQ	TOR	KNQ	TYPQ	WEITERE KENNWERTE
1	4	1	7	1	

ANZAHL DER INTERESSIERENDEN TORSpannungen MAUS= 6

LAGE DER Spannungen,MARKIERTE KNOTEN

NRW	LTQ	TOR	KNW
1	1	1	1
2	1	2	2
3	3	1	5
4	2	1	3
5	2	2	4
6	4	1	7

6.3.3 Festlegung der Ein- und Ausgangsgrößen

Das in Gl.(6/3.4) und Gl.(6/3.5) ausgedrückte mathematische Modell ordnet jeder abhängigen Variablen v_i eine unabhängige Variable v_i' zu. Dem entspricht für das Netzwerk die Auffassung, daß formal jedes Leitungstor durch eine zusätzliche Quellwelle erregt wird, die sich additiv der dort bereits vorhandenen rücklaufenden Leitungswelle überlagert. Für das Ausgangstor einer Wellenquelle wirkt dabei die Quellwelle als einprägende Größe, da wegen der Anpassung am anderen Tor von dorthier keine Anteile möglich sind.

Da bei dem zu Grunde gelegten Netzwerkmodell Quellwellen immer nur in Verbindung mit Wellenquellen auftreten, kann eine abhängige Variable, die unmittelbar durch eine unabhängige Variable bestimmt ist, wie eine eingeprägte Größe behandelt werden. Die Programmierung der Hauptbeziehung Gl.(6/3.4) nimmt nun eine einfache Form an: Vor jedem Rechendurchgang werden den betreffenden abhängigen Variablen die Werte der zugehörigen Quellgrößen zugewiesen, ohne daß explizit der Eingangsvektor $\underline{v}'$ aufgestellt zu werden braucht. Im Anschluß daran werden dann die Werte der anderen abhängigen Variablen schrittweise durch Lösen der zugehörigen Teilgleichung ermittelt. Der Schluß des Rechengangs besteht in der Berechnung von Gl.(6/3.5), wobei nur die Teilgleichungen für die jeweils interessierenden Elemente des Ausgangsvektors $\underline{v}$ auszuwerten sind.

Die Kennzeichnung der Eingangsgrößen erfolgt durch zwei Angaben: erstens wird der Ort der Quellwellen im Netzwerk beschrieben und zweitens die Art ihres zeitlichen Verlaufs. Zur Beschreibung des Ortes sind die Leitung und das Leitungstor zu benennen, an denen die betreffende Quellwelle heraustritt, während die Art der Quelle durch eine Typzahl zu charakterisieren ist. Die für jede Quelle einzugebenden Daten sind Nummer der Quelle, Nummer der Leitung und Nummer des Leitungstores, sowie die Typzahl der Quelle. Hat

beispielsweise die aufgeführte Leitung die Nummer i , so kommen als Quellvariable zunächst die Größen v'_{2i} und v'_{2i-1} in Frage; durch die Angabe des Tores wird dann die gewünschte Variable endgültig festgelegt. Den Typzahlen der Quellen sind Unterprogramme zugeordnet, die während des Programmablaufs die Werte der Quellgrößen bereitstellen. Je nach Typ der Quelle werden dafür evtl. noch zusätzliche Eingabewerte benötigt, die dann per Programm im Anschluß an die angegebene Typzahl aufgerufen werden. Diese zusätzlichen Kennwerte können ganz verschiedener Art sein, z.B. der Anfangszeitpunkt, die Dauer und die Amplitude einer festgelegten Impulsart oder andere spezielle Parameter für die Kennzeichnung eines Zeitverlaufs. Während in dem einen Extremfall für jeden Zeitpunkt der Wert der betreffenden Quellgröße einzulesen ist, reicht in dem anderen Extremfall allein die Typzahl der Kennzeichnung aus.

Die Anzahl der möglichen Quellen ist im Prinzip nicht beschränkt. Für das erstellte Programm liegt aber zur Zeit auf Grund der Datenausgabe eine praktische Begrenzung auf maximal sechs Quellen vor: bei dem gewählten Zahlenformat für die Druckausgabe sind maximal sieben nebeneinander liegende Positionen für das Protokollieren möglich, von denen dann noch mindestens eine für die Angabe einer Ausgangsgröße zu reservieren ist.

Die Angabe darüber, welche Ausgangsgrößen ermittelt werden sollen, geschieht durch die Benennung der Leitung und des Leitungstores der gesuchten Torspannung. Die Eingabedaten sind Nummer der Ausgangsgröße, Nummer der Leitung und Nummer des Tores; im Protokoll erscheint noch zusätzlich der Index der gesuchten Spannung. Zur Zeit werden die Ausgangsgrößen nur als Zahlen über den Schnelldrucker ausgegeben; geplant ist die Erweiterung auf eine graphische Ausgabe des Kurvenverlaufs.

Ein Beispiel der protokollierten Eingabedaten zur Festlegung der Ein- und Ausgangsgrößen findet sich in Abschnitt 6.3.2.5 am Ende der anderen dort aufgeführten Protokollausschnitte.

6.4 Beispiele

6.4.1 Einschwingvorgang bei dem begleitenden Schaltbeispiel

Für das begleitende Schaltbeispiel aus Bild 2/6 bzw. Bild 2/12 zeigt Bild 6/3 den Verlauf einiger Spannungen, die entsprechend der Bezeichnung von Bild 2/12 indiziert sind. Die Dimensionierung der Schaltung findet sich in Abschnitt 6.3.2.5; die Erregung geschieht durch das Einschalten einer Gleichspannung der normierten Amplitude Eins zur Zeit $t=0$. Die Spannungen u_1 und u_2 streben dem Endwert 0,875, die Spannung u_4 dem Endwert 0,5 und die Spannung u_5 dem Endwert 0,375 zu.

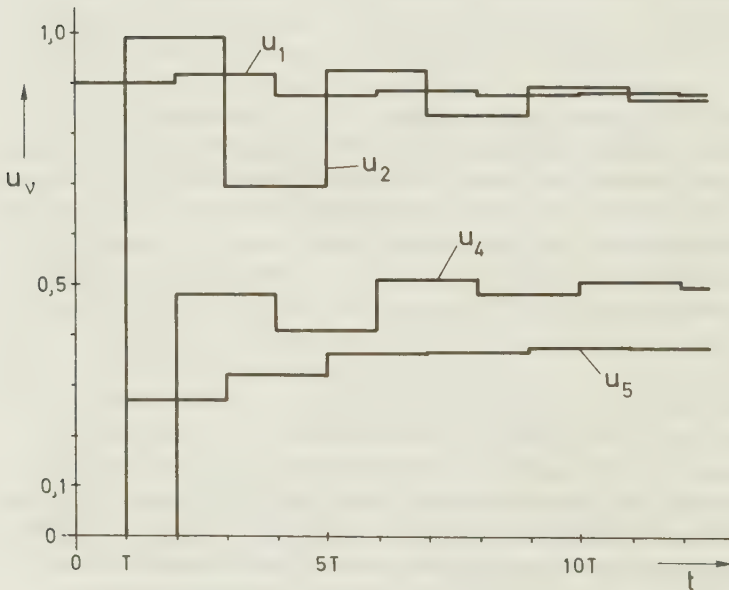


Bild 6/3: Gleichspannungsschaltvorgang bei dem begleitenden Schaltbeispiel

6.4.2 Impulsverkürzung mit einer fünfstufigen Leitungskaskade

Die Vorgänge bei der Impulsverkürzung eines Rechteckimpulses mit einer fünfstufigen Leitungskaskade, die nach Gl.(4/3.33) dimensioniert ist, werden durch Bild 6/4 verdeutlicht. Die Spannung u_0 ist die Spannung nach der ersten, die Spannung u_2 die Spannung nach der zweiten Elementarleitung und so fort. Die errechnete Amplitude der Ausgangsspannung u_5 stimmt in allen zehn signifikanten Stellen mit dem theoretischen Wert, nämlich dem Sechsfachen der Eingangsamplitude überein.

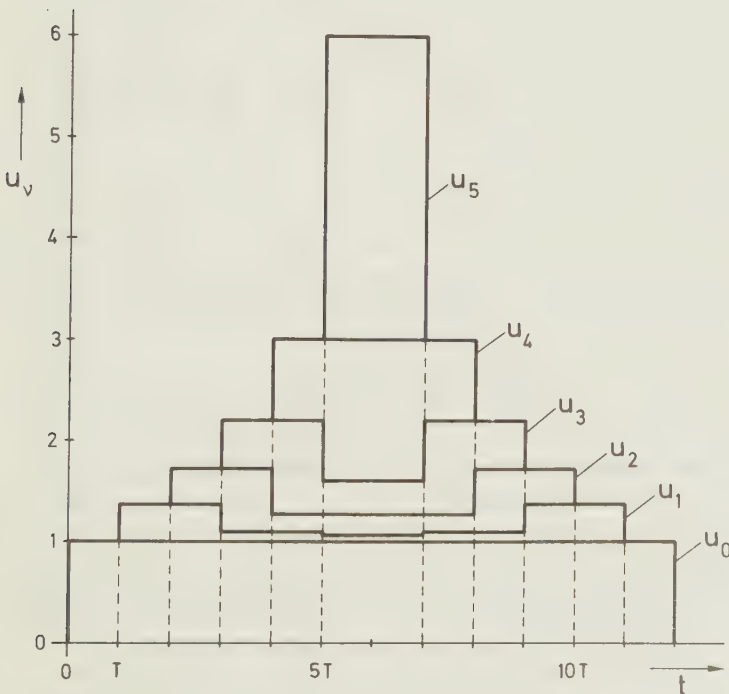


Bild 6/4: Impulsverkürzung mit einer fünfstufigen Leitungskaskade

6.4.3 Einschwingverhalten von Mehrelementekopplern

Der Mehrelementekoppler ist eine hochfrequenztechnische Anordnung, bei dem zwei parallele Leitungen durch mehrere Querleitungen miteinander verbunden sind. Die Längen der Querleitungen sind gleich ihren gegenseitigen Abständen und betragen bei der Mittenfrequenz $f_0 = \frac{1}{4T}$ ein Viertel der Wellenlänge λ_0 , mit dem die Schaltung betrieben wird. Der Mehrelementekoppler stellt also ein typisches Netzwerk aus Elementarleitungen dar. In Bild 6/5a und Bild 6/5b sind die Prinzipskizzen eines dreiarmligen und eines neunarmigen Kopplers dargestellt. Die dort angegebenen Zahlenwerte sind normierte Wellenleitwerte und sind den Arbeiten von Wheeler (6/13) und Reed (6/13,14) entnommen; die Angaben finden sich auch in dem Handbuch (4/15) Seite 817. Die Dimensionierung ergibt einen 3dB-Koppler, d.h. bei Einspeisung am Tor 1 mit dem Bandmittensignal erscheint am Tor 2 und 3 jeweils die halbe Leistung, während das Tor 4 entkoppelt ist.

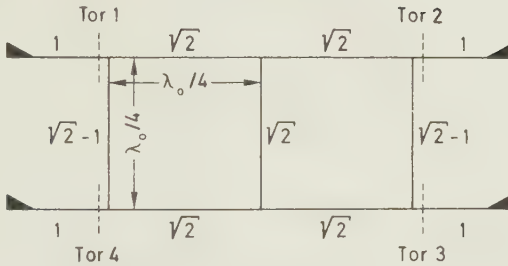
Über Verfahren zur Berechnung des Einschwingverhaltens von Leitungskopplern der genannten Art ist von Getsinger (6/11) und Ross (3/7) berichtet worden. Die dabei verwendete Methode benutzt die Impulsantwort, die über die Rücktransformation aus dem Frequenzbereich gewonnen wird (siehe Abschnitt 6.2.3).

Im folgenden wird mit dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zunächst die Impuls- und die Sprungantwort der gezeigten Koppler bestimmt und ihr Einschwingverhalten bei der Bandmittenfrequenz ermittelt. Den Abschluß bildet eine Untersuchung des Einschwingvorgangs, wenn die Koppler gemäß Bild 6/5c als Summen-Differenz-Netzwerk eingesetzt werden. Die Eingangsgrößen sind die Quellspannungen; die Quellwellen, d.h. die in die Tore einlaufenden Wellen, besitzen dann jeweils nur die halbe Amplitude.

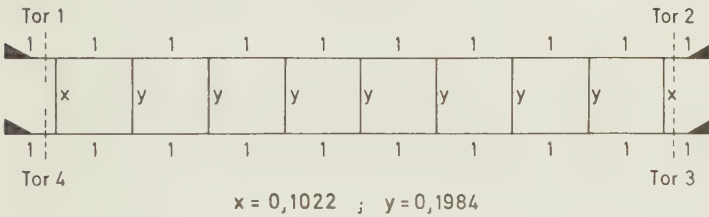
Wir wenden uns zunächst dem in Bild 6/5a dargestellten dreiarmligen Koppler zu.

Für die Angabe der Impulsantwort werden nur Glieder berücksichtigt, deren Betrag größer als 0,00050 ist. Bei Erregung

a) Dreiarmer Koppler (3dB)



b) Neunarmiger Koppler (3dB)



c) Anwendung als Summen - Differenz - Netzwerk

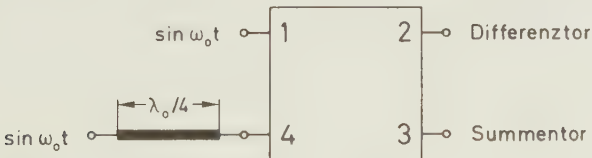


Bild 6/5: Die betrachteten Mehrelementekoppler und ihre Anwendung als Summen-Differenz-Netzwerk

am Tor 1 lauten die Impulsantworten an den Toren 2, 3 und 4 mit gerundeten Koeffizienten wie folgt:

$$\begin{aligned} h_2(t) = & -0,23570 \delta_0(t-2T) - 0,03774 \delta_0(t-4T) + 0,06635 \delta_0(t-6T) \\ & - 0,02078 \delta_0(t-8T) + 0,00382 \delta_0(t-10T) + 0,00545 \delta_0(t-12T) \\ & - 0,00439 \delta_0(t-14T) + 0,00182 \delta_0(t-16T); \end{aligned} \quad (6/4.1a)$$

$$\begin{aligned} h_3(t) = & 0,29521 \delta_0(t-3T) - 0,07041 \delta_0(t-5T) + 0,01554 \delta_0(t-7T) \\ & + 0,01663 \delta_0(t-9T) - 0,01051 \delta_0(t-11T) + 0,00352 \delta_0(t-13T) \\ & + 0,00089 \delta_0(t-15T) - 0,00148 \delta_0(t-17T) + 0,00082 \delta_0(t-19T); \end{aligned} \quad (6/4.1b)$$

$$\begin{aligned} h_4(t) = & 0,10355 \delta_0(t-T) + 0,13988 \delta_0(t-3T) - 0,00163 \delta_0(t-5T) \\ & - 0,00553 \delta_0(t-7T) + 0,02126 \delta_0(t-9T) - 0,01102 \delta_0(t-11T) \\ & + 0,00337 \delta_0(t-13T) + 0,00101 \delta_0(t-15T) - 0,00153 \delta_0(t-17T) \\ & + 0,00083 \delta_0(t-19T). \end{aligned} \quad (6/4.1c)$$

Eine Skizze der Impulsantworten zeigt die erste Bildspalte von Bild 6/6; wegen der Symmetrie der Schaltung genügt die Angabe für die Erregung am Tor 1. Die beiden anderen Bildspalten geben für die verschiedenen Tore die Sprungantwort und die Einhüllende $e(t)$ des Betrages der Antwort $g(t)$, definiert durch

$$|g(t)| = e(t) \cdot |\sin \omega_0 t| \quad (6/4.2)$$

auf eine Eingangsspannung $\delta_{-1}(t) \sin \omega_0 t$ der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4T} = \frac{\pi}{2T} \quad (6/4.3)$$

an; die Dauer $2T$ einer Treppe entspricht dabei einer halben Periode der Schwingung. Die Sprungantworten streben dem Endwert 0,25 zu und die Einhüllenden $e_2(t)$ und $e_3(t)$ an



Bild 6/6: Einschwingvorgänge des dreiarmigen Kopplers

den Toren 2 und 3 dem Endwert $\sqrt{2}/4$.

Für die Verwendung des Kopplers als Summen-Differenz-Netzwerk sind die beiden Bandmittensignale an den Toren 1 und 4 mit einer Phasenverschiebung von 90° gegeneinander einzuspeisen. Die erforderliche Phasenverschiebung kann dadurch erreicht werden, daß das eine Signal über eine dem Tor vorgeschaltete $\lambda/4$ -Leitung eingespeist wird. Bild 6/5c zeigt die Prinzipskizze mit einer dem Tor 4 reflexionsfrei vorgeschalteten Leitung; das Tor 3 ist das Summentor und das Tor 2 das Differenztor. Bild 6/7 zeigt die entsprechend Gl.(6/4.2) definierte Einhüllende $e(t)$ des sinusförmigen Einschwingvorgangs für das Summen- und das Differenztor; die Einhüllende $e_3(t)$ des Signals am Summentor strebt dem Endwert $\sqrt{2}/2$ zu.

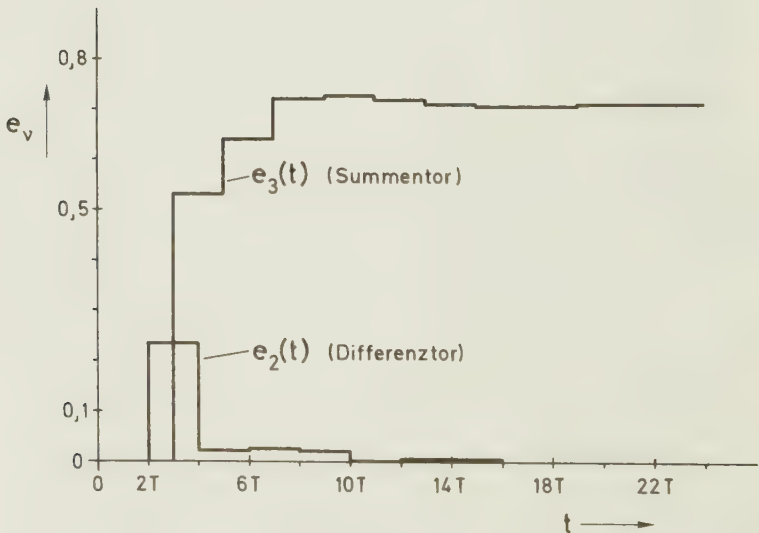


Bild 6/7: Einschwingvorgang des als Summen-Differenz-Netzwerk geschalteten dreiarmigen Kopplers

Wir betrachten nun die Einschwingvorgänge des in Bild 6/5b gezeigten neunarmigen Kopplers, der vorerst nur am Tor 1 erregt wird.

Die Impulsantworten des neunarmigen Kopplers klingen im Gegensatz zum dreiarmigen Koppler nur allmählich ab. Nehmen wir wiederum eine willkürliche Schranke der Größe 0,0005 an, so liegen beispielsweise für das Tor 2 die Beträge der Teilimpulse erst für Zeiten größer als 72T alle unter dieser Schranke. Die entsprechende Zeit für das Tor 3 und 4 ist 73T. Nehmen wir eine Schranke der Größe 0,005 an, so ergibt sich für das Tor 2 die Zeit 40T, für das Tor 3 und 4 die Zeit 39T. Für die nachfolgend angegebenen Koeffizienten liegt die Schranke bei 0,01; die Impulsantworten lauten mit gerundeten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 h_2(t) = & 0,23612 \delta_0(t-8T) - 0,05404 \delta_0(t-10T) + 0,09375 \delta_0(t-12T) \\
 & + 0,00837 \delta_0(t-14T) - 0,04236 \delta_0(t-16T) - 0,01463 \delta_0(t-18T) \\
 & + 0,02018 \delta_0(t-20T) + 0,01641 \delta_0(t-22T) - 0,00657 \delta_0(t-24T) \\
 & - 0,01397 \delta_0(t-26T);
 \end{aligned}
 \tag{6/4.4a}$$

$$\begin{aligned}
 h_3(t) = & 0,33931 \delta_0(t-9T) - 0,07350 \delta_0(t-11T) - 0,05808 \delta_0(t-13T) \\
 & + 0,02869 \delta_0(t-15T) + 0,03457 \delta_0(t-17T) - 0,00642 \delta_0(t-19T) \\
 & - 0,02309 \delta_0(t-21T) - 0,00468 \delta_0(t-23T) + 0,01351 \delta_0(t-25T);
 \end{aligned}
 \tag{6/4.4b}$$

$$\begin{aligned}
 h_4(t) = & 0,04625 \delta_0(t-T) + 0,10309 \delta_0(t-3T) + 0,09408 \delta_0(t-5T) \\
 & + 0,03788 \delta_0(t-7T) - 0,01537 \delta_0(t-9T) - 0,02980 \delta_0(t-11T) \\
 & - 0,01013 \delta_0(t-13T) + 0,01246 \delta_0(t-15T) + 0,01951 \delta_0(t-17T) \\
 & + 0,00708 \delta_0(t-19T) - 0,01773 \delta_0(t-21T) - 0,01214 \delta_0(t-23T) \\
 & + 0,01316 \delta_0(t-25T) + 0,01256 \delta_0(t-27T) - 0,00628 \delta_0(t-29T) \\
 & - 0,01113 \delta_0(t-31T).
 \end{aligned}
 \tag{6/4.4c}$$

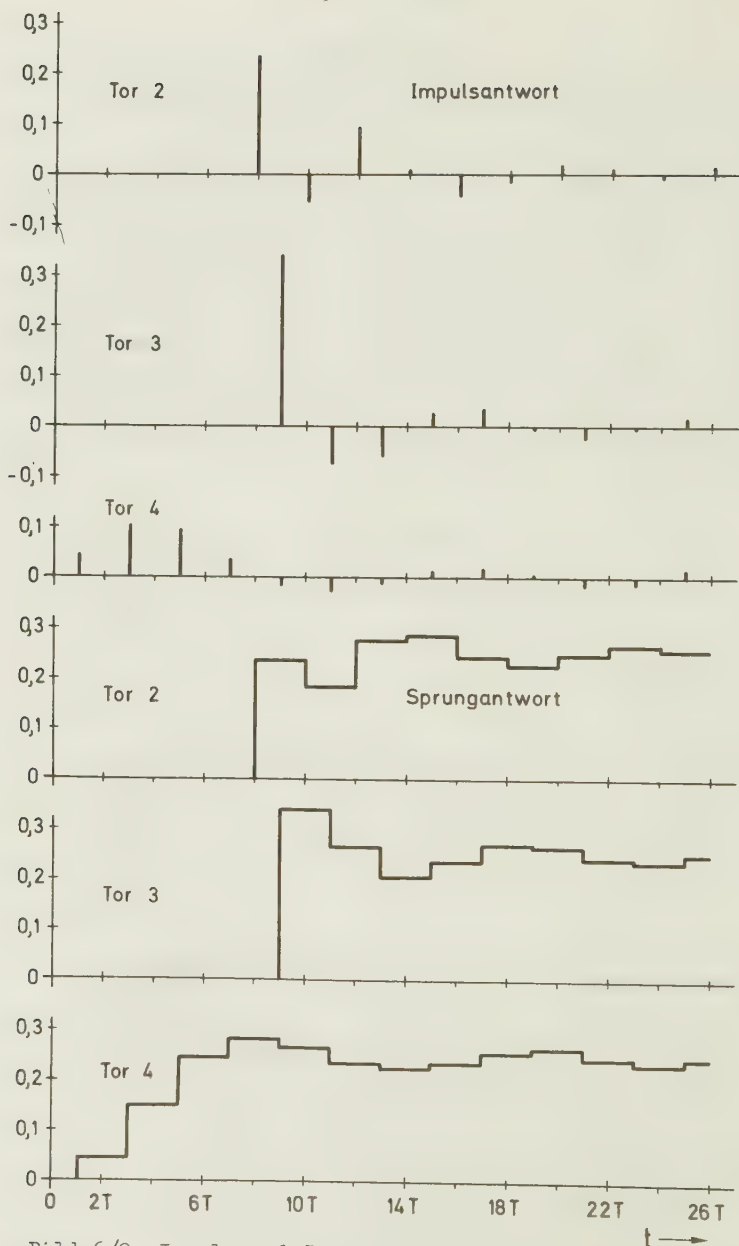


Bild 6/8: Impuls und Sprungantwort des
neunarmigen Kopplers

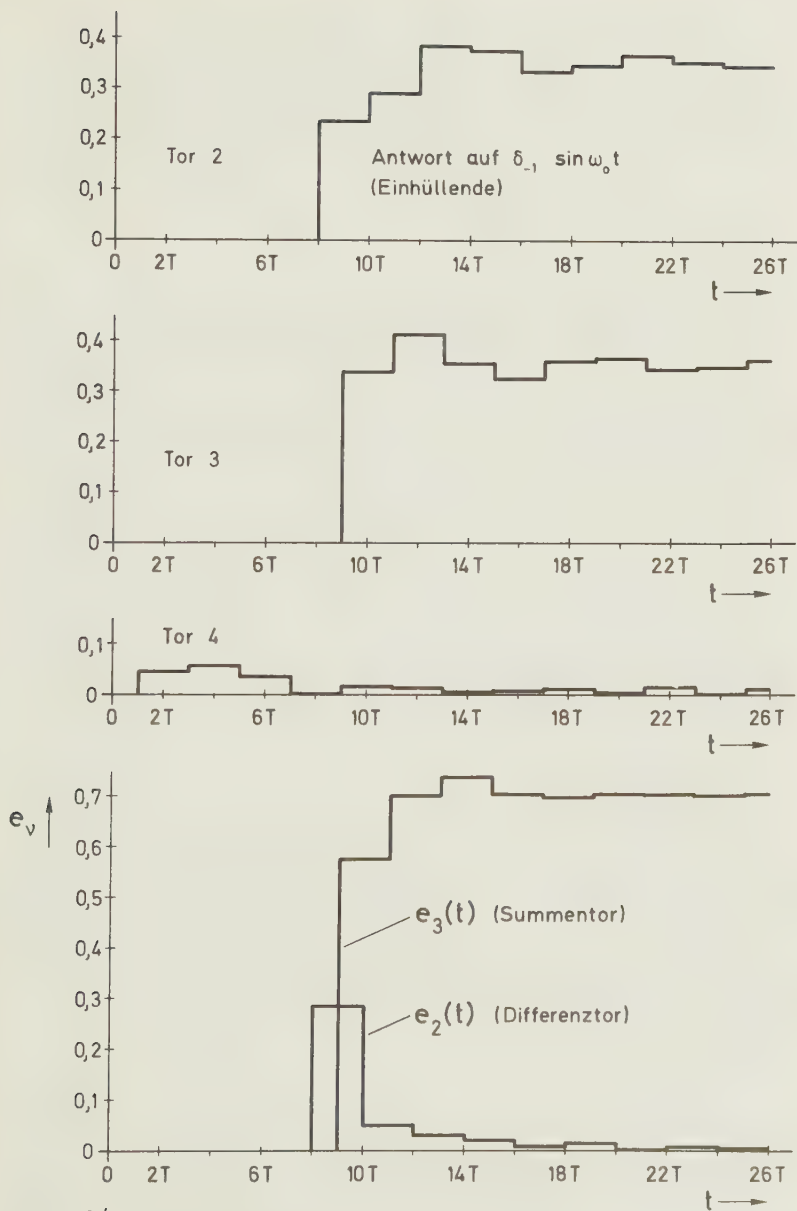


Bild 6/9: Verhalten des neuarmigen Kopplers bei sinusförmiger Erregung am Tor 1 und bei der Verwendung als Summen-Differenz-Netzwerk

Die graphische Darstellung der Impulsantwort an den verschiedenen Toren zeigt Bild 6/8; außerdem finden sich dort die zugehörigen Sprungantworten (Endwert 0,25). Bild 6/9 gibt die Einhüllenden für eine sinusförmige Erregung am Tor 1 an (Endwert $\sqrt{2}/4$) und die Einhüllenden bei Erregung mit zwei entsprechend Bild 6/5c phasenverschobenen Schwingungen (Summentor-Endwert $\sqrt{2}/2$).

6.4.4 Aufladung eines Kondensators über eine Zusammenschaltung aus Widerstand, Leitung und Spule

Ein Beispiel für ein Leitungsnetzwerk, das sich durch das erweiterte Grundmodell beschreiben läßt, ist die in Bild 6/10 gezeigte Schaltung. Die Schaltung stellt ein Ersatzbild für die Aufladung eines Kondensators über eine Zusammenschaltung aus Widerstand, Leitung und Spule dar. Für die Untersuchung werden die folgenden normierten Werte, nämlich der Wellenwiderstand $Z=4$ und die Laufzeit $100T=1$ der Leitung, die Induktivität $L=2$, die Kapazität $C=1/10$ und die Quellspannung $u_0 = \delta_{-1}(t)$ festgehalten, und der Innenwiderstand R_0 der Quelle verändert. Es werden die Fälle a) $R_0=1$, b) $R_0=4$ und c) $R_0=16$ betrachtet; der Reflexionsfaktor

$$r_0 = \frac{Z - R_0}{Z + R_0} \quad (6/4.5)$$

nimmt dann die Werte a) $r_0=0,6$, b) $r_0=0$ und c) $r_0=-0,6$ an.

Bei der wellenmäßigen Darstellung der Induktivität L und der Kapazität C durch eine kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Elementarleitung der Laufzeit $T=1/100$ ergeben sich für die Wellenwiderstände der Ersatzleitungen nach Gl.(5/3.3) die Werte

$$Z_I = \frac{L}{T} = 200$$

und

$$Z_K = \frac{T}{C} = 0,001.$$

(6/4.6)

Für die unter dem Fall b vorliegende eingangsseitige Anpassung läßt sich die Spannung $u_C(t)$ an der Kapazität C in elementarer Weise aus der Analyse des R,L,C-Netzwerkes berechnen; die Leitung bewirkt lediglich eine Zeitverzögerung. Man erhält für $t \geq 0$

$$u_C(t+1) = 1 - e^{-t}(\cos 2t + 0,5 \sin 2t). \quad (6/4.7)$$

Im Fall b ist also ein Vergleich zwischen dem exakten Verlauf und dem näherungsweise gültigen Verlauf möglich. Mit dem gewählten Wert für die Laufzeit $T=1/100$ und der dadurch bedingten Unterteilung der Leitung in 100 Abschnitte machen sich die Abweichungen erst in der vierten Dezimalstelle bemerkbar; die Rechengenauigkeit ist demnach ausreichend für die in Bild 6/10 gezeigte graphische Darstellung, die im folgenden diskutiert wird.

Die erste Wellenfront trifft am Ausgang der Leitung zur Zeit $t=1$ ein. Ihre Amplitude ist gleich dem Transmissionsfaktor $(1+r_0)$; wegen des unterschiedlichen Wertes für $(1+r_0)$, nämlich a) 1,6 , b) 1,0 und c) 0,6 ergibt sich ein unterschiedlicher Anstieg der Ausgangsspannung. Die Reflexion der Welle am Eingang macht sich erst zur Zeit $t=3$ bemerkbar und zwar nur für die Fälle a und c, da im Fall b ja eingangsseitige Anpassung vorliegt. Da im Fall a die rücklaufende Welle am Eingang in ihrem Vorzeichen gedreht wird, im Fall c aber ihr Vorzeichen beibehält, ergeben sich unterschiedliche Annäherungen an den Endwert Eins, der im Fall b oszillierend und im Fall c stufenweise erreicht wird.

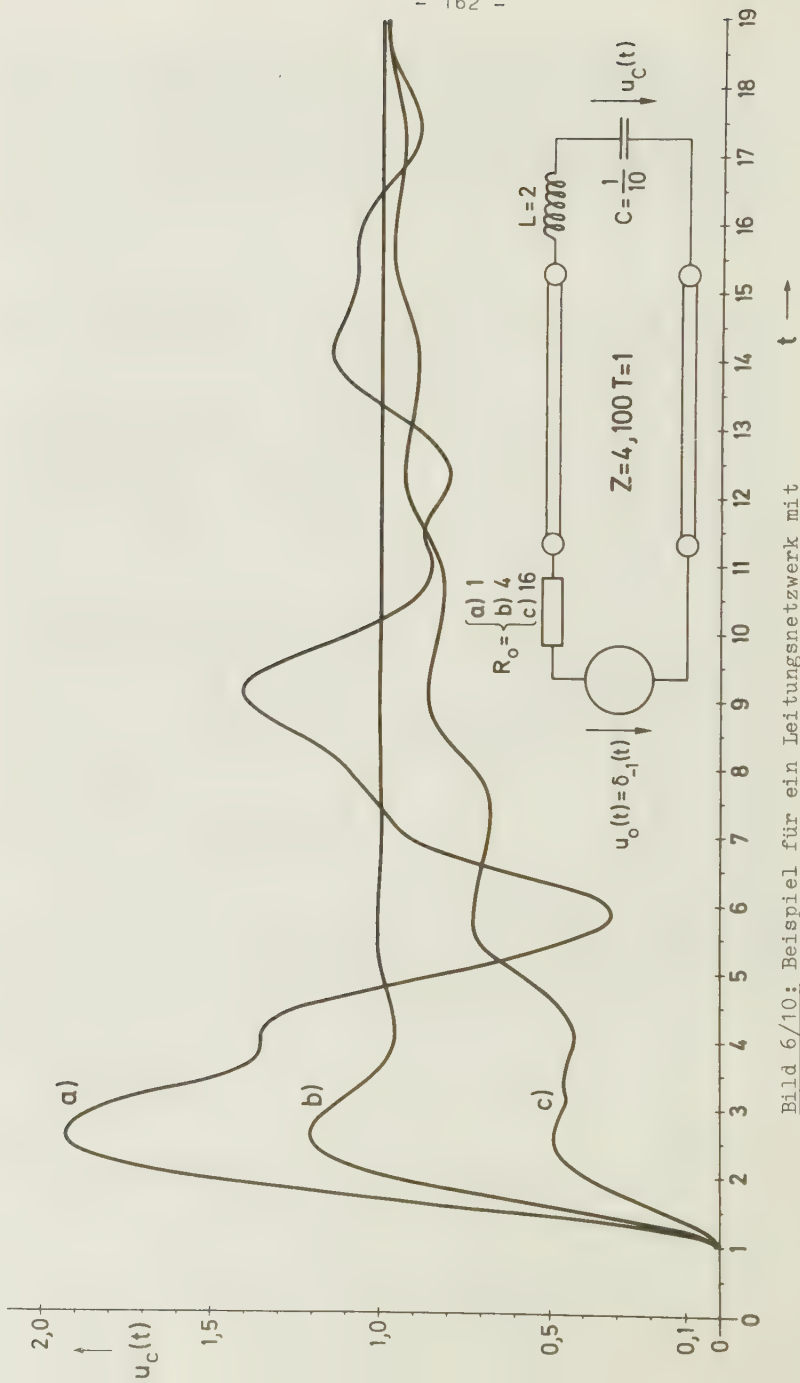


Bild 6/10: Beispiel für ein Leitungsnetzwerk mit reaktiven Elementen

7. Simulation von Leitungsnetzwerken auf dem Analogrechner

7.1 Die Methode der direkten Simulation

Um das Verhalten physikalischer Gebilde am Analogrechner zu simulieren, geht man im allgemeinen so vor, daß der dazu notwendige Koppelplan für die Analogrechenbausteine aus dem in Gleichungsform vorliegenden mathematischen Modell des Gebildes entwickelt wird. Dabei sind häufig Umformungen und Annäherungen der beschreibenden Gleichungen notwendig, da bei ihrer Darstellung durch den Koppelplan die beschränkte Art und Anzahl der möglichen Analogrechenbausteine zu berücksichtigen sind. Die Ermittlung des Koppelplans aus den Gleichungen kann besonders bei umfangreichen und komplizierten Systemen große Schwierigkeiten bereiten.

Für Systeme, die aus einer Verbindung einfacher Teilelemente bestehen, ist von Robichaud (7/1) ein verkürztes Verfahren, die "direkte Simulation" bekannt geworden, das auf der Äquivalenz zwischen dem Signalflußgraphen eines Systems einerseits und dem Blockschaltbild der Analogrechenschaltung andererseits beruht. Man geht dabei von einer Signalflußgraphendarstellung der Teilelemente aus, die so gewählt wird, daß eine Vereinigung der Teilsignalflußgraphen zu einem Gesamtsignalflußgraphen möglich ist. Die Struktur der gesamten Analogrechenschaltung ergibt sich dann aus der entsprechenden Verbindung der Teilschaltungen. Gegebenenfalls muß eine Umformung des Signalflußgraphen vorausgehen, um sicherzustellen, daß die Realisierung auf zulässige und zweckmäßige Analogrechenbausteine führt. Der Vorteil der direkten Simulation, nämlich die schnelle Ermittlung der Rechenschaltung aus dem Signalflußgraphen, bleibt aber nur dann erhalten, wenn die Signalflußgraphendarstellung des zu untersuchenden Systems nicht zu schwierig ist. Da die Struktur und die wellenmäßigen Vorgänge der hier betrachteten Systeme unmittelbar durch Signalflußgraphen beschreibbar sind, ist die genannte Voraussetzung erfüllt: im folgenden wird zur Gewinnung der Koppelpläne stets die direkte Simulation als Arbeitsmethode eingesetzt.

Die Unterteilung der Netzwerkstruktur in Elementarleitungen und Stoßstellen gibt die beiden unterschiedlichen Gruppen der Teilelemente an, für die geeignete Rechenschaltungen zu entwickeln sind. Die Ausführungen beschränken sich im weiteren auf dispersionsfreie, lineare Leitungsnetzwerke. Für eine Stoßstelle ist also eine lineare algebraische Verknüpfung und für die Elementarleitung eine Zeitverzögerung zu realisieren, wobei die ermittelten Koppelpläne die durch die Streumatrizen ausgedrückten Ursache-Wirkungs-Beziehungen simulieren.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst aus den bekannten Verfahren zur Realisierung einer Zeitverzögerung eine Auswahl für die später behandelten Beispiele getroffen, wobei auf einfache Grundschaltungen zur Verzögerung von Treppenfunktionen zurückgegriffen wird. Im Anschluß daran wird das verwendete Arbeitsprinzip zur Herleitung potentiometerarmer Koppelpläne für die Stoßstellen aufgezeigt und an Hand einer Reihe wichtiger Stoßstellentypen katalogartig erläutert. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit der Erweiterung des Simulationssystems zur Darstellung kontinuierlicher Zeitverläufe. Den Abschluß bildet dann eine Reihe von Beispielen, die unter anderen die im vierten Kapitel entwickelten Schaltungen zur Impulsverkürzung und Impulsanpassung behandeln.

Im Gegensatz zur Simulation einer Zeitverzögerung, für die es in der Analogrechentechnik eine Anzahl verschiedener Verfahren gibt (7/2,...,9), sind Anwendungen auf Leitungsprobleme nur im geringen Maße bekannt geworden (7/10,11).

7.2 Die Simulation der Zeitverzögerung

Für die getreue Simulation der durch die Laufzeit der Wellen bedingten Verzögerung auf einer Elementarleitung werden Glieder gebraucht, die eine ideale Zeitverzögerung bewirken. Ideale Zeitverzögerung bedeutet Speichermöglichkeit beliebig verlaufender Funktionen bei gleichzeitiger Möglichkeit eines stetigen Ein- und Auslesens des Speichers. Diese Eigenschaft kann mit Analogrechenbausteinen nur angenähert realisiert werden und ist mit hohem Aufwand verbunden (z.B. (7/2)).

Im Gegensatz zu Verzögerungsgliedern für beliebig verlaufende Funktionen sind Glieder, die in zeitlich gleichmäßigen Abständen konstante Funktionen (Treppenfunktionen) bzw. lediglich an äquidistanten Zeitpunkten vorhandene Funktionswerte (Abtastwerte) zu verzögern haben, wesentlich einfacher zu realisieren. Ein geeignetes Glied zur Verzögerung von Treppenfunktionen und Abtastwerten ist (in Verbindung mit Abtastern) das Abtasthalteglied. Abtasthalteglieder sind die wesentlichen Bausteine spezieller Abtastanalogrechner (Kuntz (7/3,4)), lassen sich aber auch durch geeignete Programmierung des Zusammenspiels von Integrierern am konventionellen Analogrechner aufbauen (z.B. (7/5,...,8)). Abtasthalteglieder finden ferner als Hauptbausteine der Digitalen Filter (z.B. (7/12,13)) Verwendung. Die Forderung nach gleichzeitiger Einspeicherung eines neuen und Abfrage des alten, vorhergehenden Wertes bedingt die Verwendung mindestens zweier Speicherelemente, die entweder parallel oder in Serie arbeiten können.

Der einfachste Anwendungsfall ist die Verzögerung einer Treppenfunktion durch ein Abtasthalteglied um die Dauer einer Treppe. Durch einen nachfolgenden Abtaster (im einzelnen siehe (7/3)) läßt sich auch die Verzögerung eines Eingangsimpulses realisieren. Für im Raster kT diskretisierte Treppenfunktionen bzw. Impulszüge liegt eine Zeitverzögerung um das Intervall T vor; für diese Funktionen wirkt das Abtasthalteglied wie ein Glied der Übertragungsfunktion

$1/z = e^{-sT}$. Die verzögernden Eigenschaften einer Elementarleitung für eine Richtung lassen sich also durch nur ein Glied exakt simulieren, wenn an den Wellenverlauf die obigen Anforderungen gestellt werden. Die gesamte Elementarleitung wird durch zwei derartige Glieder dargestellt; Bild 7/1 zeigt den Signalflußgraphen und den Koppelplan. Im weiteren wird angenommen, daß die Verzögerungsglieder summierende Eingänge besitzen.

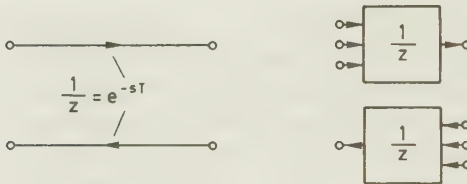


Bild 7/1: Signalflußgraph und symbolischer Koppelplan für eine Elementarleitung

Werden Verzögerungen um mehr als einen Rasterabstand gefordert, so kann diese Aufgabe z.B. durch die Hintereinanderschaltung mehrerer Abtasthalteglieder, die dann ein Analogschieberegister bilden, gelöst werden. Im Gegensatz zur seriellen Anordnung ist aber auch eine Parallelanordnung von Speicherelementen möglich, bei der zeitlich im Takt der Abtastung die einzelnen Funktionswerte in die Speicher eingelesen und nach der Gesamtverzögerungsdauer wieder abgefragt werden (7/9). Da bei der Parallelanordnung die einzelnen Abtastwerte während der Gesamtverzögerungsdauer in den jeweiligen Speicherzellen festliegen und nicht seriell weitergeschoben werden, entfallen die Übernahmefehler in den Amplitudenwerten, die bei der wiederholten Abtastung in der seriellen Anordnung auftreten. Verzögerungsglieder für mehrere, z.B. a Funktionswerte erlauben die exakte Simulation der Laufzeitverzögerung aT auf Leitungsstücken a -facher Elementarleitungslänge, wenn die Funktionen im Raster kT

diskretisiert sind, bzw. der Laufzeitverzögerung $T = a\tau$ auf einer Elementarleitung, wenn die Funktionswerte im engen Raster $k\tau$ vorliegen.

7.3 Die Simulation der Stoßstellen

7.3.1 Das verwendete Prinzip der Schaltungsentwicklung

Die topologische Darstellung der Streumatrix einer Stoßstelle ist ein Signalflußgraph, dessen Zweiggewichte von den Streukoeffizienten gebildet werden. Eine unmittelbare Anwendung der Methode der direkten Simulation führt auf eine Analogrechenschaltung, deren Bausteine wegen der reellen Koeffizienten aus Potentiometern (für den Betrag) und aus Umkehrern (für das Vorzeichen) bestehen. Da der normierte Einstellungsbereich der Potentiometer zwischen Null und Eins liegt, lassen sich Reflexionsfaktoren (Bereich -1 bis $+1$) sehr gut, Transmissionsfaktoren (Bereich 0 bis 2) aber wegen der Bereichsüberschreitung weniger gut realisieren. Da jeder Koeffizient mit einem dazugehörigen Potentiometer eingestellt wird, stimmt die Anzahl der benötigten Potentiometer mit der Anzahl der Streumatrixelemente überein. Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit der Elemente müssen im allgemeinen bei der Veränderung eines Potentiometers auch alle anderen nachgestellt werden. Wie man sieht, ergibt die sofortige Überführung des unmittelbar aus der Streumatrix gewonnenen Signalflußgraphen eine unzweckmäßige, aufwendige und redundante Rechenschaltung.

Es stellt sich die Frage, wie die Rechenschaltungen verbessert werden können, und welche Eigenschaften anzustreben sind. Von Vorteil wäre, wenn

1. möglichst nur so viel Potentiometer benötigt werden, wie freie Parameter vorhanden sind,
2. jeder freie Parameter unabhängig von den übrigen eingestellt werden kann, und
3. der Einstellbereich der Potentiometer gut ausgenutzt wird.

Da es bei der Simulation des Streuverhaltens einer Stoßstelle auf die genaue Darstellung der Streukoeffizienten ankommt, werden als primäre Parameter auch weiterhin die Streukoeffizienten angesehen und nicht die beteiligten Widerstände. Abgesehen von den Schwierigkeiten und Fehlermöglichkeiten bei der Erzeugung von Streukoeffizienten über Schaltungen, deren Parameter die Widerstände selbst sind, hat die direkte Realisierung der Koeffizienten den Vorteil, daß der Einstellbereich der Potentiometer besser ausgenutzt werden kann, besonders wenn bei der Wahl der freien Parameter zunächst die Reflexionsfaktoren berücksichtigt werden.

Der in dieser Arbeit benutzte Weg zur Gewinnung von Rechenschaltungen, die obigen Anforderungen genügen, besteht aus folgenden Schritten:

a) Wahl der Parameter

Als erstes wird ermittelt, über wieviel freie Parameter die Streumatrix der zu behandelnden Stoßstelle verfügt. Danach wird die Art der Parameter festgelegt, wobei in der Regel die Reflexionsfaktoren gewählt werden. Als freier Parametersatz kann aber auch ein anderer, gleich großer Satz unabhängiger Spannungswellen-Verhältnisse zweckmäßig sein.

b) Darstellung der Streukoeffizienten als Linearkombination aus den freien Parametern

Da als Streumatrix die Spannungs-Streumatrix verwendet wird, sind die als Spannungswellen-Verhältnisse definierten Streukoeffizienten linear voneinander über die freien Parameter abhängig. Die Streukoeffizienten werden nun als Linearkombination der freien Parameter dargestellt, die dann die einzigen algebraischen Größen innerhalb der Streumatrix sind.

c) Unmittelbare topologische Darstellung der Streumatrix

Im dritten Schritt wird die Streumatrix topologisch als Signalfußgraph dargestellt, wobei die Zweige des Graphen den Matricelementen entsprechen.

- d) Zielgerichtete Veränderung des Signalflußgraphen
Im vorliegenden Signalflußgraphen tauchen die freien Parameter noch in Form von Linearkombinationen in den verschiedenen Zweigen auf. Die Struktur des Graphen wird nun durch Hinzufügen neuer Knoten und Zweige unter Beibehaltung des Übertragungsverhaltens zwischen den ursprünglichen Knoten so verändert, daß jeder freie Parameter nur noch als Zweiggewicht eines einzigen Zweiges erscheint. In der zugehörigen Rechen-schaltung können dann die freien Parameter über getrennte Potentiometer unabhängig voneinander eingestellt werden. Um Summierer zu sparen, wird gleichzeitig darauf geachtet, daß die Anzahl der entstehenden Knoten mit mehr als einem zuführenden Zweig im veränderten Signalflußgraphen klein bleibt.
- e) Aufstellung des Koppelplans durch direkte Simulation
Der gesuchte Koppelplan ergibt sich schließlich durch direkte Simulation unmittelbar aus dem veränderten Signalflußgraphen.

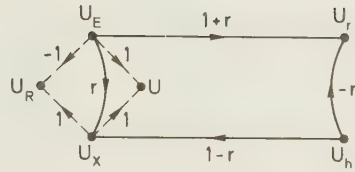
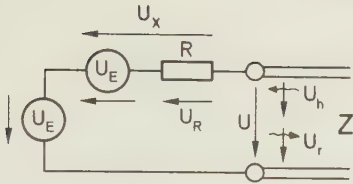
Die nachfolgend behandelten Beispiele zeigen, daß das gesetzte Ziel auch erreicht werden kann.

7.3.2 Koppelpläne für verschiedene Stoßstellentypen

Bei der anschließenden Aufstellung der Koppelpläne für eine Reihe exemplarischer Stoßstellen werden die zugehörigen Streumatrizen im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt und nur in Einzelfällen näher begründet. Um die Anwendung der Koppelpläne zu erleichtern, sind die Verbindungen mit den Zeitverzögerungsgliedern der simulierten Anschlußleitungen der Stoßstellen zusätzlich mit eingezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber wird aber auf die Angabe zusätzlicher Rechen-schaltungen, mit denen aus den dargestellten Spannungswellen interessierende Gesamtspannungen gebildet werden, an dieser Stelle verzichtet. Derartige Schaltungen werden später, wenn es um die Simulation vollständiger Leitungsnetzwerke geht, kurz an einigen Beispielen erläutert. Da die Darstellung

ein und derselben Streumatrixbeziehung mit einer Vielzahl möglicher Analogrechenschaltungen gewährleistet werden kann, wird eine Auswahl getroffen und meist nur eine, als vorteilhaft betrachtete Rechenschaltung angegeben.

In der Regel werden zu jeder behandelten Stoßstelle folgende Angaben gemacht: Schaltung, Streumatrix und zugehöriger Signalflußgraph, Bestimmungsformeln für die Streukoeffizienten aus den Werten der Schaltelemente, ein oder mehrere veränderte Signalflußgraphen und schließlich die Koppelpläne selbst. Es ist zu bemerken, daß die verwendeten Summierer das Vorzeichen umkehren und daher auch als Inverter eingesetzt werden. Da durch Potentiometer keine negativen Faktoren realisiert werden können, gilt für ein Potentiometer mit der Markierung r_i der Wertebereich $0 \leq r_i \leq 1$ und für ein Potentiometer mit der Markierung $-r_i$ der Wertebereich $-1 \leq r_i \leq 0$. Für einige einparametrische Stoßstellen sind jeweils Koppelpläne für die beiden Wertebereiche angegeben; im allgemeinen läßt sich der gesamte Wertebereich durch die Benutzung zusätzlicher Inverter überstreichen.



$$r = \frac{Z-R}{Z+R}$$

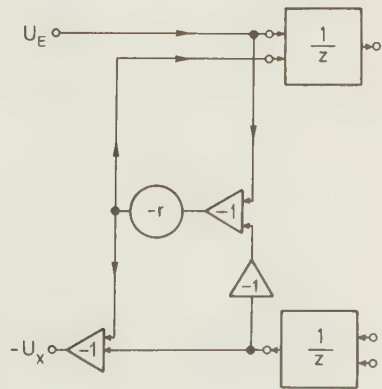
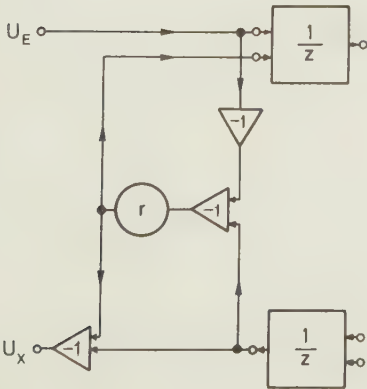
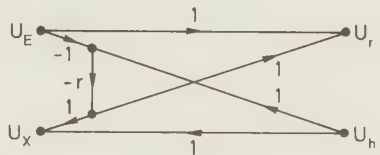
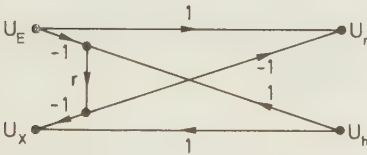
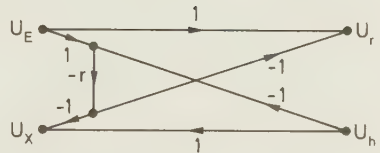
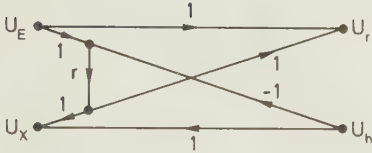


Bild 7/2: Speisung einer Leitung durch einen innenwiderstandsbehafteten Generator

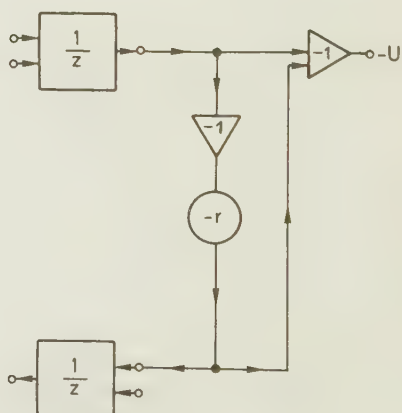
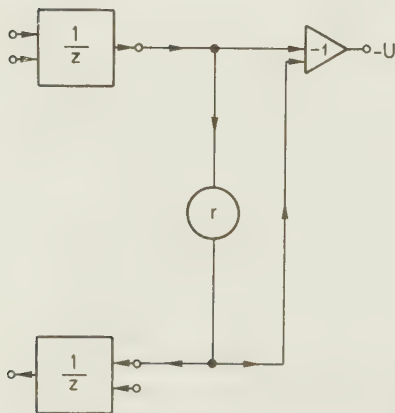
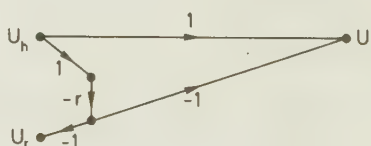
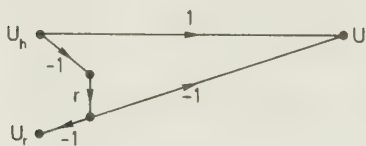
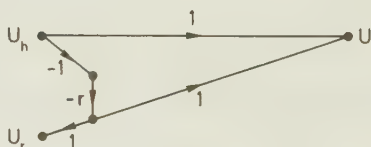
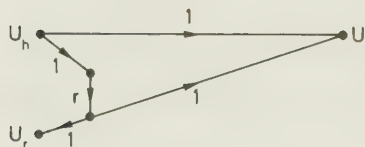
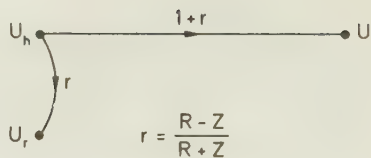
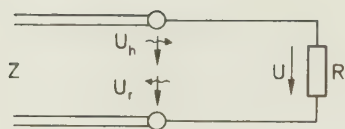
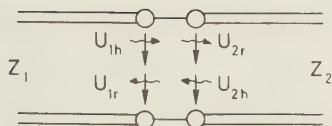
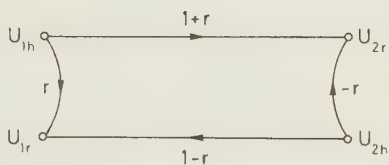


Bild 7/3: Abschluß einer Leitung mit einem Widerstand



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1+r & -r \end{pmatrix}$$



$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

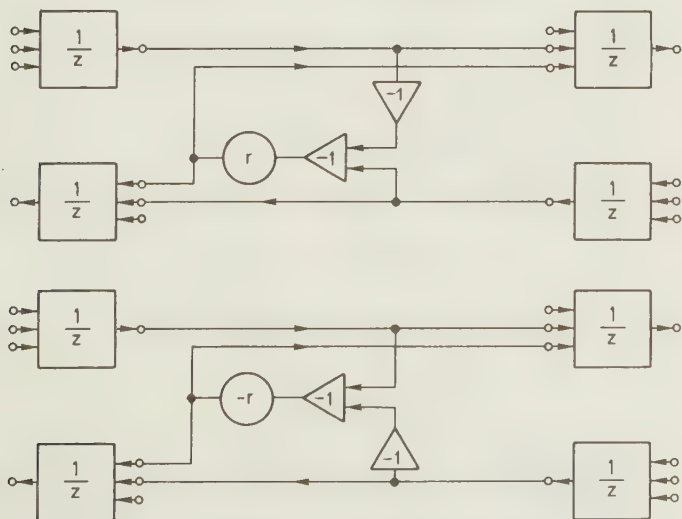
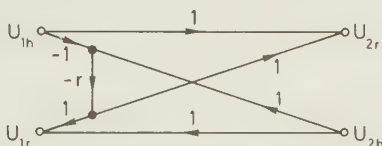
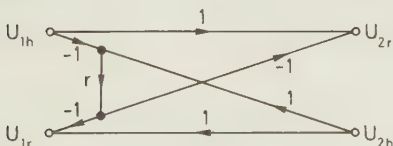
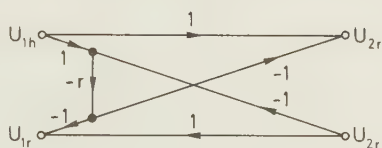
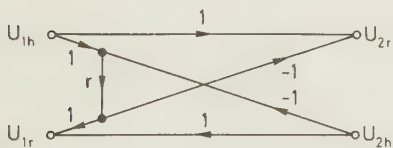
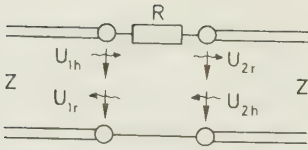
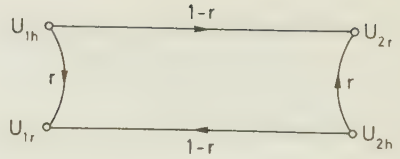


Bild 7/4: Direkte Verbindung zwischen zwei Leitungen
verschiedenen Wellenwiderstandes



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1-r & r \end{pmatrix}$$



$$r = \frac{R}{R + 2Z}$$

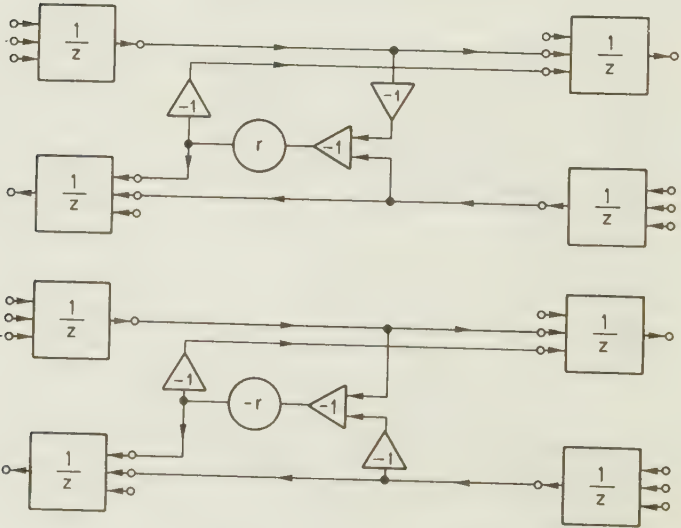
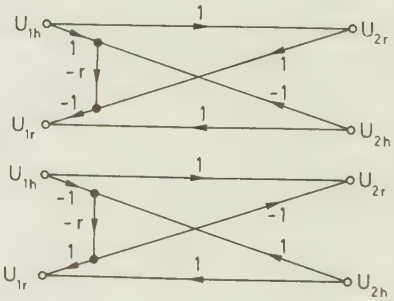
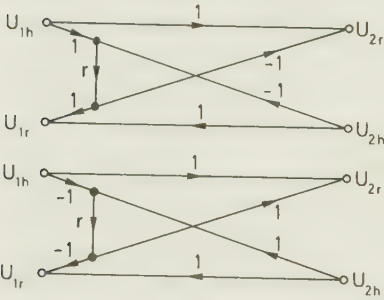
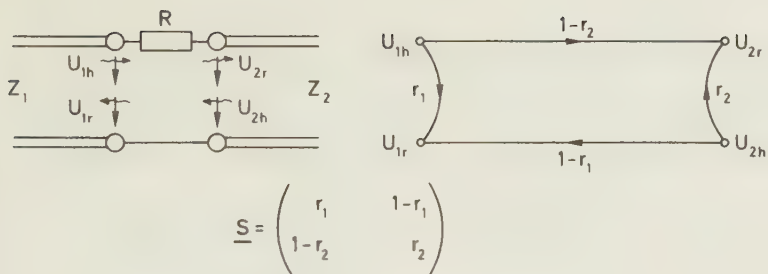


Bild 7/5: Verbindung zweier Leitungen gleichen Wellenwiderstandes über einen Serienwiderstand



$$r_1 = \frac{(Z_2 + R) - Z_1}{Z_1 + Z_2 + R} = + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + R} + \frac{R}{Z_1 + Z_2 + R} = r_a + r_b$$

$$r_2 = \frac{(Z_1 + R) - Z_2}{Z_1 + Z_2 + R} = - \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + R} + \frac{R}{Z_1 + Z_2 + R} = -r_a + r_b$$

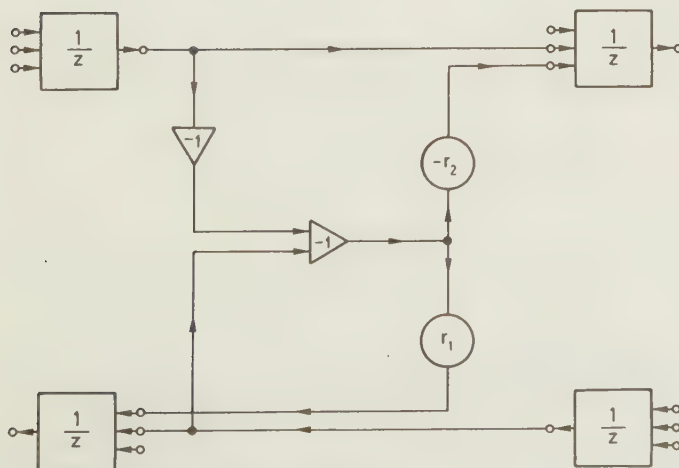
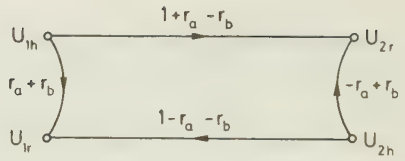
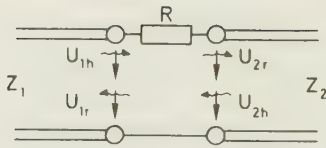


Bild 7/6a: Verbindung zweier Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes über einen Serienwiderstand (Auflösung nach den Reflexionsfaktoren)



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_a + r_b & 1 - r_a - r_b \\ 1 + r_a - r_b & -r_a + r_b \end{pmatrix}$$

$$r_a = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + R} = r_1 - r_2$$

$$r_b = \frac{R}{Z_1 + Z_2 + R} = r_1 + r_2$$

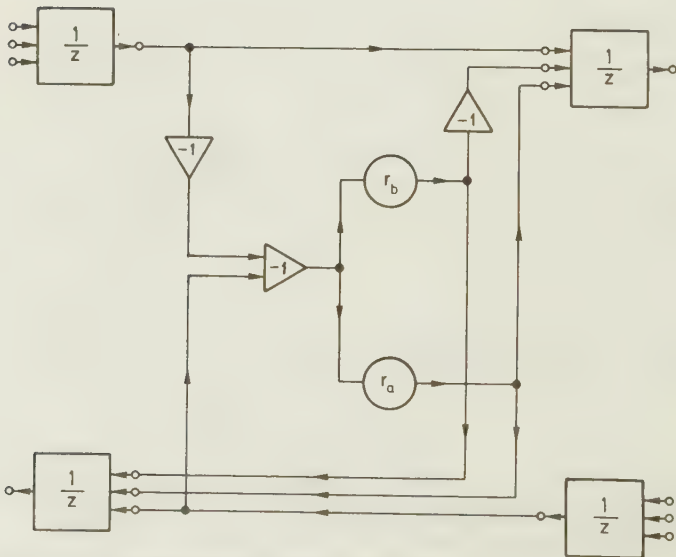
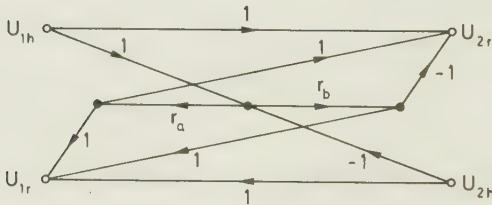
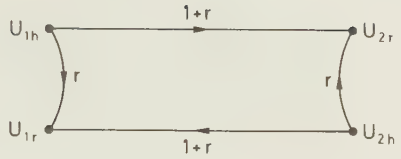
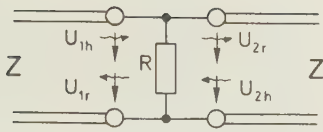


Bild 7/6b: Verbindung zweier Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes über einen Serienwiderstand (Auflösung nach anderen Parametern)



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r & 1+r \\ 1+r & r \end{pmatrix}$$

$$r = -\frac{Z}{2R+Z}$$

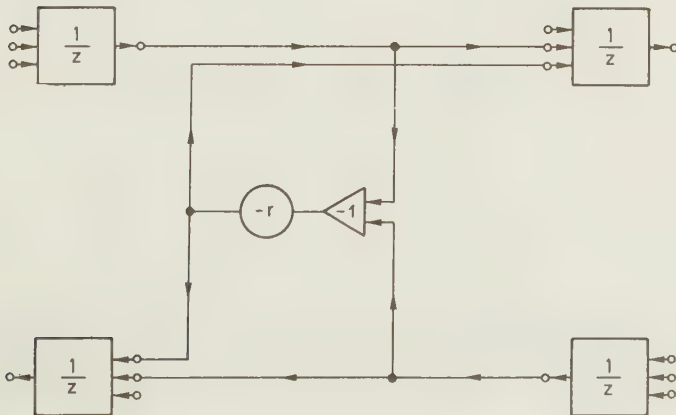
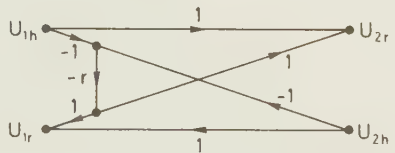
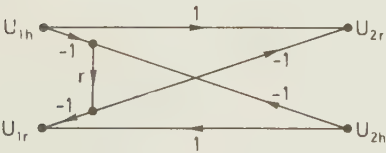
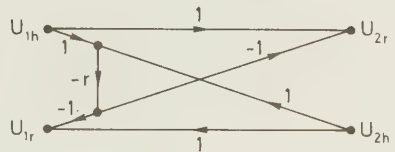
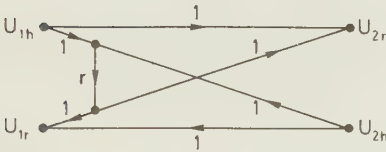
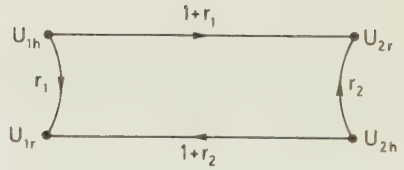
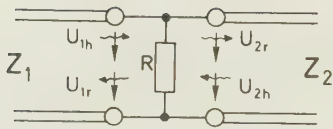


Bild 7/7: Verbindung zweier Leitungen gleichen Wellenwiderstandes über einen Parallelwiderstand



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 1+r_2 \\ 1+r_1 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = \frac{(Z_2 - Z_1)R - Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)R + Z_1 Z_2} = \frac{Y_1 - (Y_2 + G)}{Y_1 + Y_2 + G} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2 + G} - \frac{G}{Y_1 + Y_2 + G} = r_a + r_b$$

$$r_2 = \frac{(Z_1 - Z_2)R - Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)R + Z_1 Z_2} = \frac{Y_2 - (Y_1 + G)}{Y_1 + Y_2 + G} = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2 + G} - \frac{G}{Y_1 + Y_2 + G} = -r_a + r_b$$

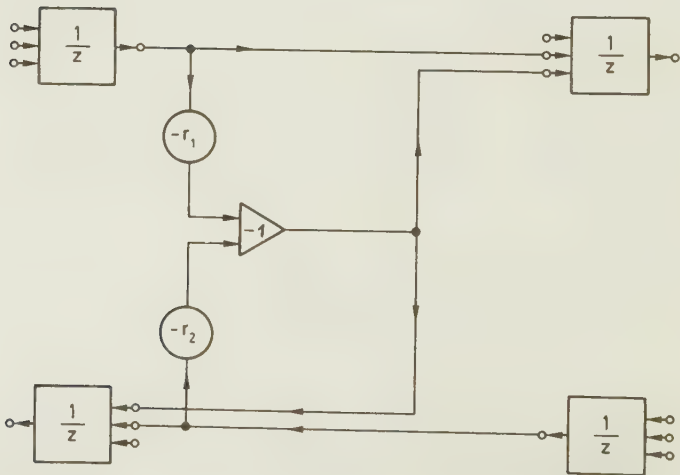
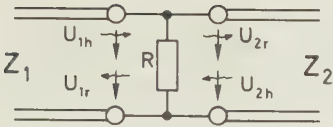
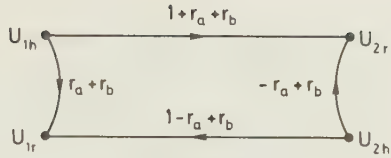


Bild 7/8a: Verbindung zweier Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes über einen Parallelwiderstand (Auflösung nach den Reflexionsfaktoren)



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_a + r_b & 1 - r_a + r_b \\ 1 + r_a + r_b & -r_a + r_b \end{pmatrix}$$



$$r_a = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2 + G}$$

$$r_b = -\frac{G}{Y_1 + Y_2 + G}$$

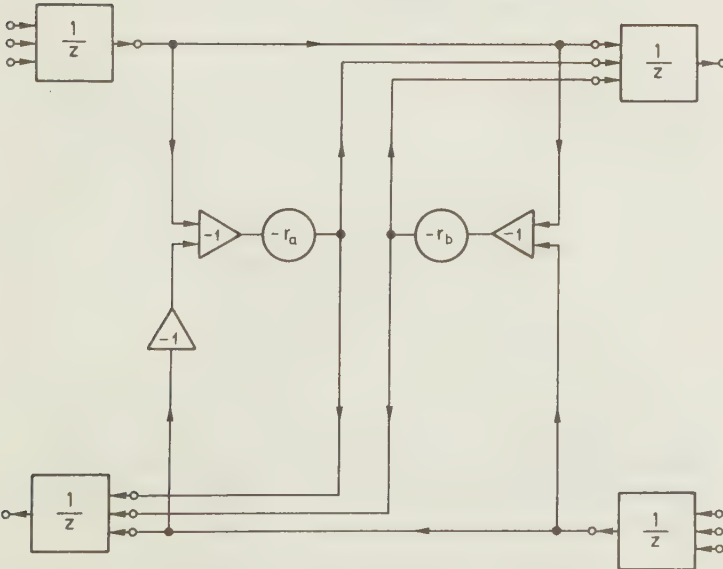
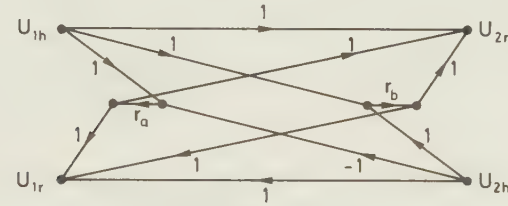
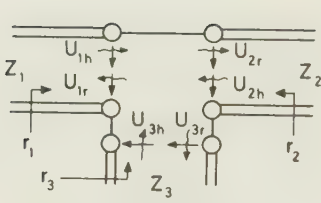
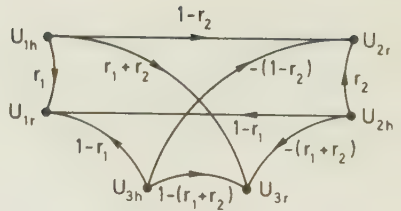


Bild 7/8b: Verbindung zweier Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes über einen Parallelwiderstand (Auflösung nach anderen Parametern)



$$r_1 + r_2 + r_3 = 1$$

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 1-r_1 & 1-r_1 \\ 1-r_2 & r_2 & -(1-r_2) \\ r_1+r_2 & -(r_1+r_2) & 1-(r_1+r_2) \end{pmatrix}$$



$$r_1 = \frac{(Z_2 + Z_3) - Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$r_2 = \frac{(Z_1 + Z_3) - Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$r_3 = \frac{(Z_1 + Z_2) - Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

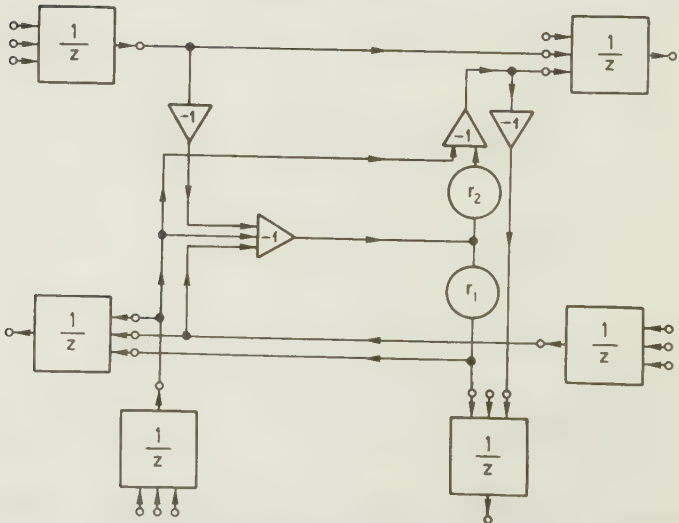
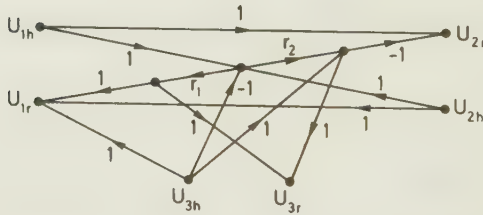
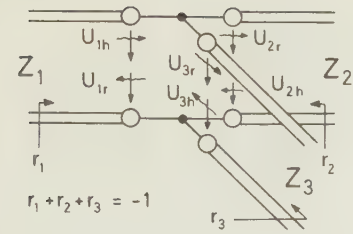
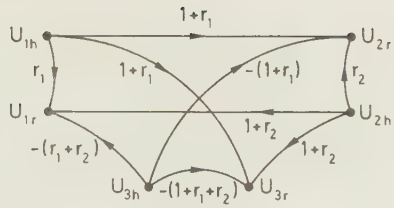


Bild 7/9: Serienverbindung von drei Leitungen
verschiedenen Wellenwiderstandes



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 1+r_2 & -(r_1+r_2) \\ 1+r_1 & r_2 & -(r_1+r_2) \\ 1+r_1 & 1+r_2 & -(1+r_1+r_2) \end{pmatrix}$$



$$r_1 = \frac{Y_1 - (Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$r_2 = \frac{Y_2 - (Y_1 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$r_3 = \frac{Y_3 - (Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

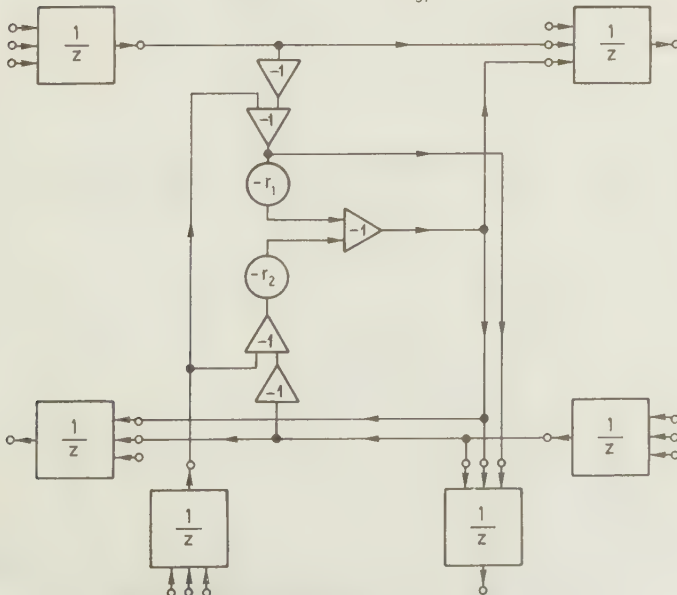
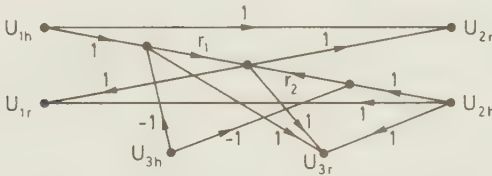
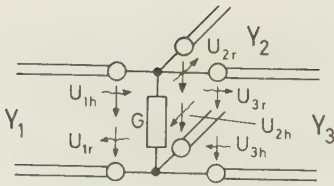
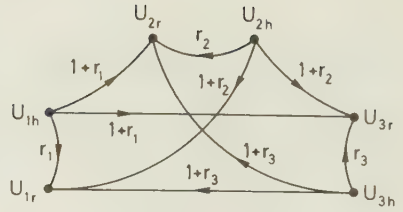


Bild 7/10: Parallelverbindung von drei Leitungen
verschiedenen Wellenwiderstandes



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 1+r_2 & 1+r_3 \\ 1+r_1 & r_2 & 1+r_3 \\ 1+r_1 & 1+r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$



$$r_1 = \frac{Y_1 - (Y_2 + Y_3 + G)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + G}$$

$$r_2 = \frac{Y_2 - (Y_1 + Y_3 + G)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + G}$$

$$r_3 = \frac{Y_3 - (Y_1 + Y_2 + G)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + G}$$

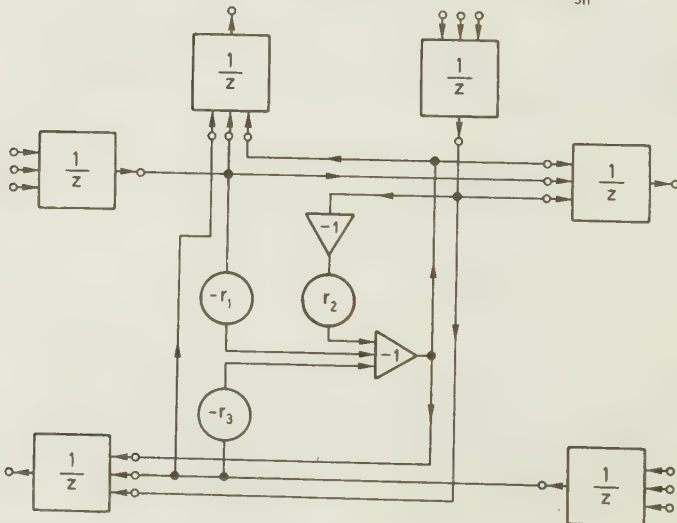
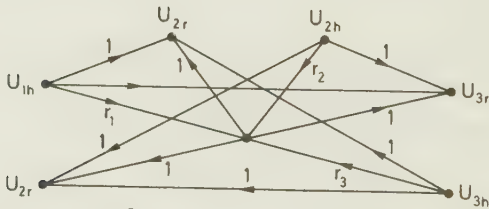
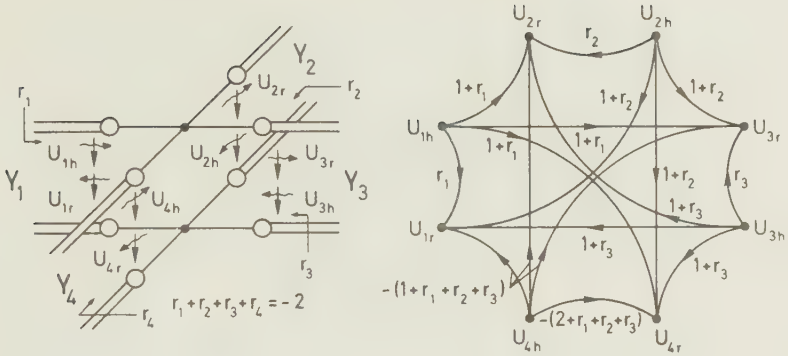


Bild 7/11: Parallelverbindung von drei Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes über einen Parallelwiderstand



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & 1+r_2 & 1+r_3 & -(1+r_1+r_2+r_3) \\ 1+r_1 & r_2 & 1+r_3 & -(1+r_1+r_2+r_3) \\ 1+r_1 & 1+r_2 & r_3 & -(1+r_1+r_2+r_3) \\ 1+r_1 & 1+r_2 & 1+r_3 & -(2+r_1+r_2+r_3) \end{pmatrix}$$

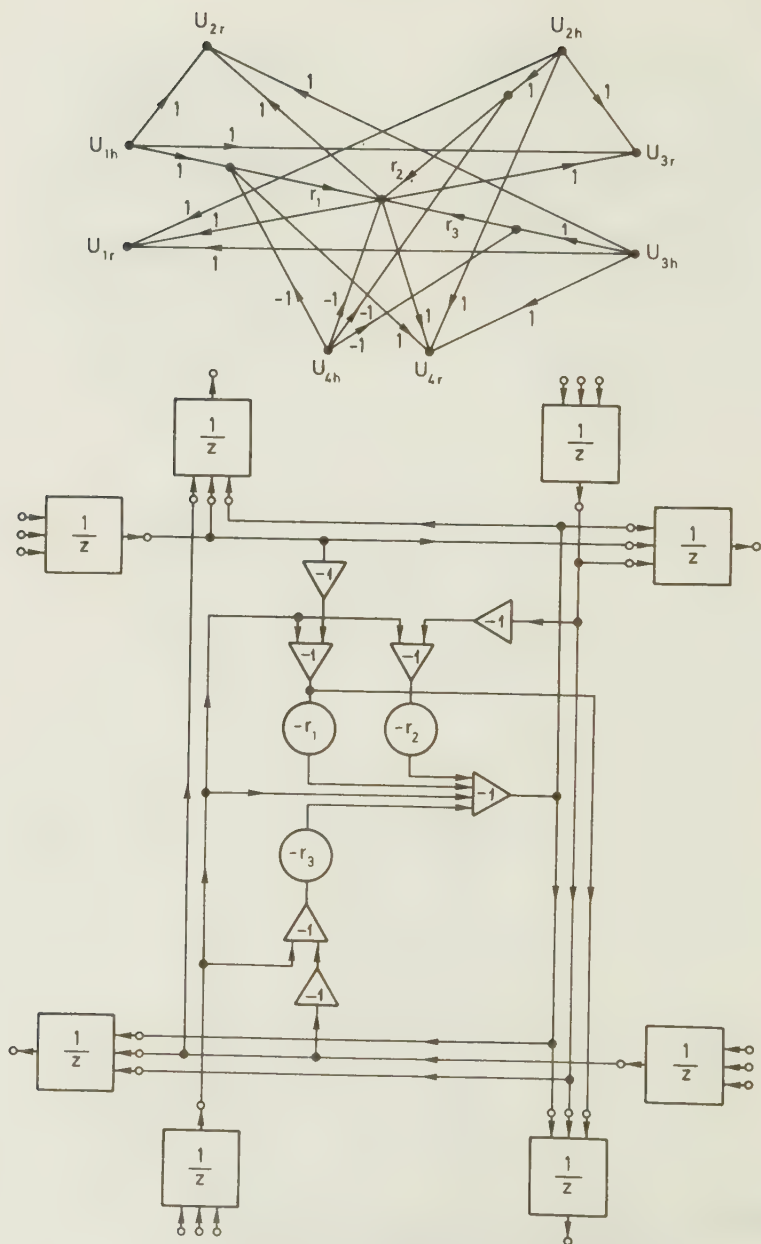
$$r_1 = \frac{Y_1 - (Y_2 + Y_3 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

$$r_2 = \frac{Y_2 - (Y_1 + Y_3 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

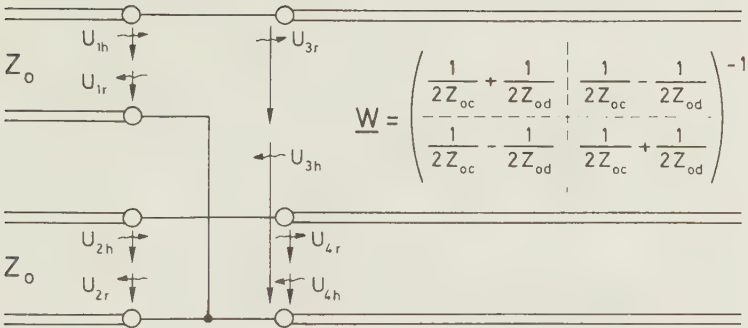
$$r_3 = \frac{Y_3 - (Y_1 + Y_2 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

$$r_4 = \frac{Y_4 - (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

Bild 7/12: Parallelverbindung von vier Leitungen
verschiedenen Wellenwiderstandes (Teil 1)



Teil 2 zu Bild 7/12



$$Z_{oc} \geq Z_o ; Z_{od} \leq Z_o$$

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_c' + r_d' & r_c' - r_d' & 1 - r_c' - r_d' & -r_c' + r_d' \\ r_c' - r_d' & r_c' + r_d' & -r_c' + r_d' & 1 - r_c' - r_d' \\ 1 + r_c' + r_d' & r_c' - r_d' & -r_c' - r_d' & -r_c' + r_d' \\ r_c' - r_d' & 1 + r_c' + r_d' & -r_c' + r_d' & -r_c' - r_d' \end{pmatrix}$$

$$r_c' = \frac{1}{2} r_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{oc} - Z_o}{Z_{oc} + Z_o} ; r_d' = \frac{1}{2} r_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_{od} - Z_o}{Z_{od} + Z_o}$$

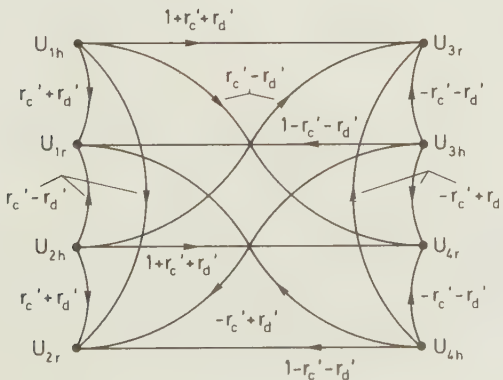
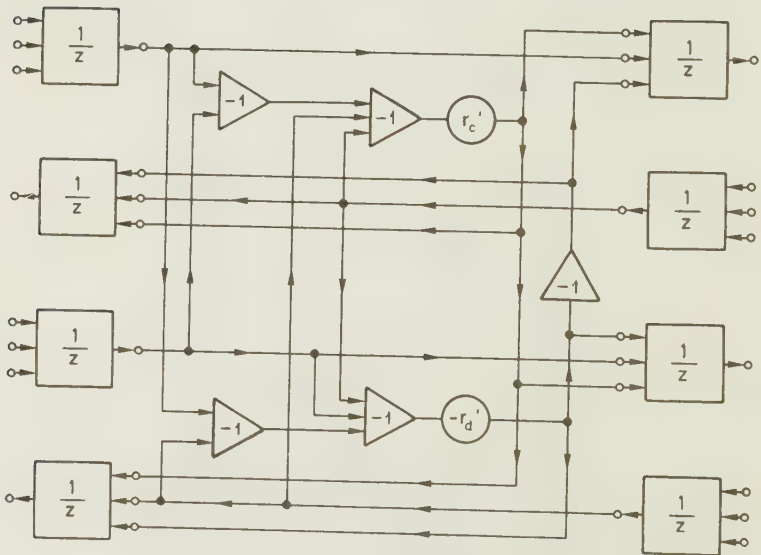
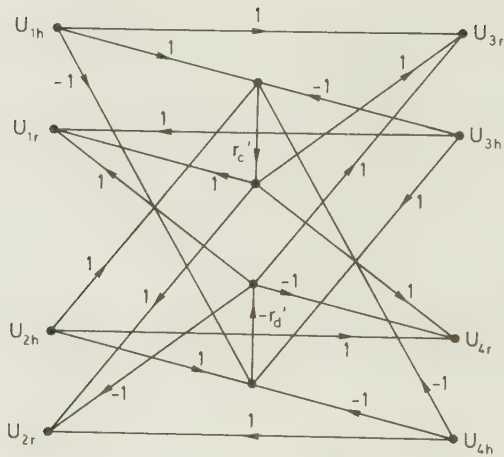


Bild 7/13: Übergang zweier entkoppelter Doppelleitungen gleichen Wellenwiderstandes auf eine Mehrfachleitung (Teil 1)



Teil 2 zu Bild 7/13

7.4 Die Darstellung kontinuierlicher Zeitverläufe durch ein erweitertes Simulationssystem

7.4.1 Vergleich zwischen gewünschtem und bisher entwickeltem Simulationssystem

Die Impulsantwort der betrachteten Leitungsnetzwerke ist bekanntlich eine Folge von äquidistanten Impulsen, nämlich

$$h(t) = h_{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \cdot \delta_0(t-kT), \quad (7/4.1)$$

wobei die Koeffizienten h_k aus der Potenzreihenentwicklung der Übertragungsfunktion

$$H_{*}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \cdot z^{-k} \quad (7/4.2)$$

hervorgehen. Da das System kontinuierliche Speicher besitzt, ist die Reaktion $y(t)$ auf eine beliebige Eingangsfunktion $u(t)$ die gewichtete Summe der zeitlich versetzten Eingangsfunktion:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \cdot u(t-kT) \quad (7/4.3)$$

Für alle Eingangsfunktionen gilt im s -Bereich die Beziehung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s), \quad (7/4.4)$$

wobei $H(s)$ aus $H_{*}(z)$ durch die Substitution $z = e^{sT}$ gewonnen werden kann.

Ein ideales Simulationssystem ist nun dadurch gekennzeichnet, daß es das Übertragungsverhalten des zu simulierenden Systems vollständig nachbildet. Es ist also, bis auf hier nicht berücksichtigte Maßstabsfaktoren, denselben Gleichungen unterworfen.

Das bisher entwickelte Simulationssystem unterliegt aber Einschränkungen, die die Art der zulässigen Eingangsfunktionen betreffen. Die wesentlichen Glieder des Systems sind die Abtasthalteglieder zur Realisierung der Zeitverzögerung auf den Elementarleitungen und die zu den Stoßstellen gehörenden algebraischen Koppelnetze zur Simulation der Streueigenschaften. Das Simulationssystem ist ein spezielles Abtastnetzwerk oder Digitales Filter, das im wesentlichen nur Treppenfunktionen als Eingangsfunktionen verarbeiten kann, wobei die Dauer einer Treppe gleich der Laufzeit T der Elementarleitung entsprechen muß. Bei der Verwendung von zusätzlichen Abtastern ist auch die getreue Verarbeitung von Abtastfolgen möglich, primär sind aber nur Treppenfunktionen zugelassen, da ein Abtasthalteglied nur dafür wie ein idealer kontinuierlicher Speicher wirkt.

Wird das entwickelte Simulationssystem mit der Treppenfunktion

$$q(t) = \sum_{l=1}^{\infty} q_l \cdot \delta_{-1}(t-lT) \quad (7/4.5)$$

erregt, so ist die Ausgangsfunktion

$$w(t) = \sum_{l=1}^{\infty} w_l \cdot \delta_{-1}(t-lT) \quad (7/4.6)$$

von der gleichen Gestalt und über

$$w(t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cdot q(t-mT) \quad (7/4.7)$$

mit der Eingangsfunktion verknüpft, wobei die Koeffizienten d_m die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der Übertragungsfunktion

$$D_{\star}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m z^{-m} \quad (7/4.8)$$

des Simulationssystems sind. Nur für Eingangsfunktionen der

in Gl.(7/4.5) ausgedrückten Form gilt im Bildbereich

$$W(s) = D(s) \cdot Q(s) \quad , \quad (7/4.9)$$

weil das Simulationssystem mit der Übertragungsfunktion $D_*(z)$ dann wie ein kontinuierliches System $D(s)$ arbeitet, wobei $D(s)$ aus $D_*(z)$ durch die Substitution $z = e^{sT}$ hervorgeht. Die Simulation der hier betrachteten Leitungsnetzwerke ist also exakt möglich, wenn speziell

$$U(s) = Q(s) \quad (7/4.10a)$$

bzw.

$$u(t) = q(t) \quad (7/4.10b)$$

gesetzt werden kann. Eine Reihe von Anwendungsfällen, z.B. die Ermittlung der Sprungantwort oder die der Reaktion auf Rechteckimpulse der Dauer T , wird damit vollständig erfaßt, aber das System versagt zunächst, wenn für $u(t)$ beliebige Funktionen zugelassen werden.

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie das Simulationssystem durch zusätzliche, nachgeschaltete Netzwerke in starkem Maße erweitert werden kann. Von den verschiedenen Erweiterungsmöglichkeiten, die schließlich zu einem verallgemeinerten Simulationssystem führen, werden im Detail stellvertretend nur einige Spezialfälle näher beschrieben.

7.4.2 Betrachtung rationaler Übertragungsfunktionen

Über die Darstellung rationaler, reellwertiger Übertragungsfunktionen der Form

$$A_{m,n}(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu} s^{\nu}} = \frac{b_m}{c_n} \frac{\prod_{\mu=1}^m (s-s_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (s-s_{\infty\nu})} \quad , \quad m \geq n \quad (7/4.11)$$

am Analogrechner hat Schüßler (7/14) berichtet. Er zeigt in seiner Arbeit, daß die Impulsantwort solcher Systeme stets als Sprungantwort simuliert werden kann, wenn der Nennergrad n größer als der Zählergrad m der Übertragungsfunktion ist. Wir wollen nun speziell auf Funktionen der Form

$$G(s) = \frac{1}{s} A_{m,n}(s) \quad (7/4.12)$$

eingehen, bei denen sichergestellt ist, daß ihr Zählergrad stets kleiner als ihr Nennergrad ist. Die Impulsantwort

$$g(t) \circ \rightarrow G(s)$$

von Systemen mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ läßt sich also immer als Sprungantwort simulieren.

Wir betrachten ein Leitungsnetzwerk, das Gl.(7/4.1) bis Gl.(7/4.4) erfüllt, und erregen es mit einer Eingangsfunktion

$$u(t) = g(t) \quad , \quad (7/4.13a)$$

bzw.

$$U(s) = G(s) \quad . \quad (7/4.13b)$$

Für die Ausgangsfunktion gilt dann nach Gl.(7/4.4) und Gl.(7/4.12)

$$Y(s) = H(s) \cdot G(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot A_{m,n}(s) \quad . \quad (7/4.14)$$

Eine Beschreibung des Gesamtsystems durch ein verallgemeinertes Blockschaltbild gibt Bild 7/14a. Da die Teilsysteme in Bild 7/14a linear und zeitinvariant sind, kann ihre Reihenfolge vertauscht werden, ohne daß sich das Gesamtübertragungsverhalten ändert. Bild 7/14b zeigt eine äquivalente Anordnung.

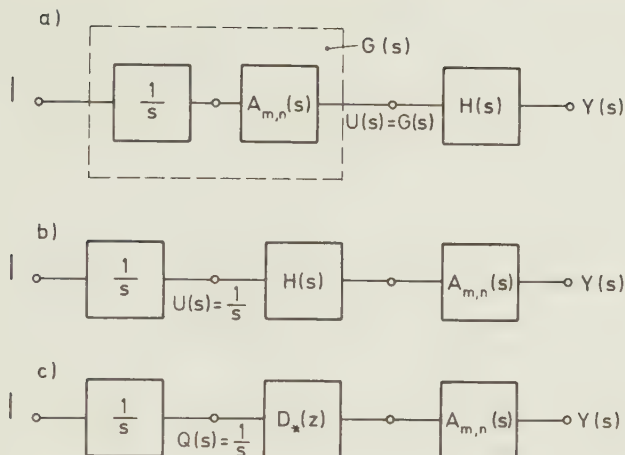


Bild 7/14: Zur Erweiterung des Simulationssystems
(Erweiterung 1)

Die Betrachtung von Bild 7/14b ergibt, daß nun die Sprungfunktion am Eingang des Systems $H(s)$ liegt. Die Sprungfunktion gehört aber zu den zulässigen Eingangsfunktionen $Q(s)$ des Simulationssystems $D_*(z)$, so daß $H(s)$ durch $D_*(z)$ ersetzt werden kann. Bild 7/14c zeigt das äquivalente, erweiterte Simulationssystem, nämlich

- 1.1) die Sprungerzeugung $\frac{1}{s}$,
- 1.2) das diskrete Simulationssystem $D_*(z)$,
- 1.3) das kontinuierliche System $A_{m,n}(s)$.

Damit ist gezeigt, daß das Verhalten der betrachteten Leitungsnetzwerke exakt simuliert werden kann, wenn außer den in Gl.(7/4.5) beschriebenen Treppenfunktionen als Eingangsgrößen Funktionen gewählt werden, die sich als Impulsantwort rationaler, reellwertiger Übertragungsfunktionen entsprechend Gl.(7/4.12) darstellen lassen. Damit sind weitere Testfunktionen als Eingangsfunktionen erlaubt, z.B. die sinusförmigen Funktionen.

Ergänzende Bemerkung: Eine weitere Klasse zulässiger Eingangsfunktionen wird erschlossen, wenn statt der kontinuierlichen Übertragungsfunktion $A_{m,n}(s)$ ein rekursives Digitales Filter $B_{m,n}(\zeta)$ verwendet wird, wobei für die diskrete Variable ζ die Bedingung $z = \zeta^a$ zu erfüllen ist. Das Digitale Filter $B_{m,n}(\zeta)$ verarbeitet diskrete Funktionen, die im engeren Zeitintervall $\tau = \frac{1}{a} T$ (a ganz) gegliedert sind. Es kann dem diskreten Simulationssystem $D_*(z)$ nachgeschaltet werden, da dessen im Raster kT erscheinende Ausgangsfunktion zulässige Eingangsfunktion von $B_{m,n}(\zeta)$ ist. Die zulässigen Eingangsfunktionen des so erweiterten Simulationssystems sind im engeren Raster $\alpha\tau$ gegliederte Treppenfunktionen, die als Impulsantwort eines Digitalen Filters darstellbar sein müssen. Über die Realisierung Digitaler Filter am Analogrechner siehe z.B. (7/3,10).

7.4.3 Ergänzung durch weitere Zusatzsysteme

Wir untersuchen nun den Fall, daß als Eingangsfunktion $u(t)$ des Leitungsnetzwerks eine gewichtete, zeitlich versetzte Folge $f(t)$ der durch Gl.(7/4.12) bestimmten Funktion $g(t)$ verwendet wird:

$$f(t) = \sum_{i=1}^I p_i \cdot g(t-iT) . \quad (7/4.15a)$$

Durch Laplace-Transformation von Gl.(7/4.15) folgt

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{i=1}^I p_i \cdot e^{-isT} \cdot G(s) \\ &= P(s) \cdot G(s) , \end{aligned} \quad (7/4.15b)$$

wobei zur Abkürzung

$$P(s) = \sum_{i=1}^I p_i \cdot e^{-isT} \quad (7/4.16a)$$

gesetzt ist.

Es gilt

$$P_*(z) = \sum_{i=1}^I p_i z^{-i} \quad (7/4.16b)$$

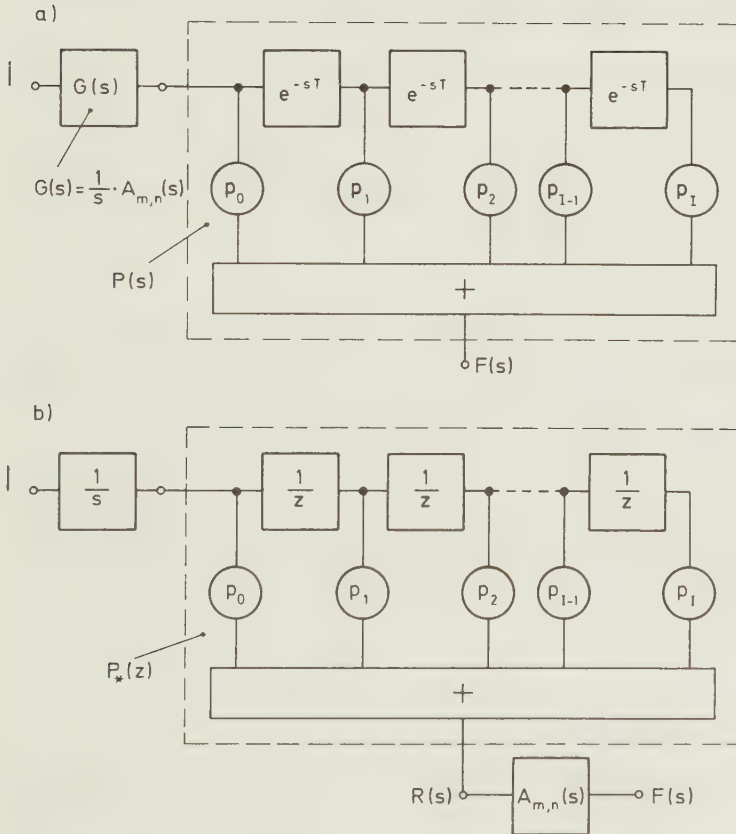


Bild 7/15: Zur Darstellung weiterer zulässiger
Eingangsfunktionen

⁺ Die Form $P_*(z)$ wird statt der Form $P(s)$ immer dann verwendet, wenn auf die diskrete Realisierung hingewiesen werden soll.

Bild 7/15 zeigt zwei äquivalente Darstellungsmöglichkeiten für derartige Funktionen durch Schaltungen nach dem Prinzip des Echoentzerrers (7/15). Während in der Anordnung nach Bild 7/15a stetige Verzögerungsglieder notwendig sind, können in der Anordnung nach Bild 7/15b als Verzögerungsglieder Abtasthalteglieder verwendet werden.

Die Ein-Ausgangsbeziehung des gesamten Leitungsnetzwerks lautet nach Gl.(7/4.4) mit $U(s) = F(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s) \cdot F(s) & (7/4.17) \\ &= H(s) \cdot P(s) \cdot G(s) \\ &= H(s) \cdot P(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot A_{m,n}(s) \quad . \end{aligned}$$

In Bild 7/16 sind einige äquivalente Anordnungen der Teilsysteme beschrieben. Von Interesse sind die Anordnungen von Bild 7/16b und Bild 7/16c, da dort am Eingang des Systems Treppenfunktionen liegen (bei Bild 7/16c speziell die Sprungfunktion), sodaß das kontinuierliche System $H(s)$ durch das diskrete Simulationssystem $D_*(z)$ ersetzt werden kann. Für die Systeme $H(s)$ bzw. $D_*(z)$ in der Anordnung nach Bild 7/16b bzw. Bild 7/16d lautet die Treppenfunktion im Bildbereich

$$R(s) = \frac{1}{s} P(s) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{i=1}^I p_i \cdot e^{-isT} \quad , \quad (7/4.18a)$$

d.h. im Zeitbereich

$$r(t) = \sum_{i=1}^I p_i \cdot \mathcal{J}_{-1}(t-iT) \quad . \quad (7/4.18b)$$

Sie ist nach Gl.(7/4.5) zulässige Eingangsfunktion $q(t) \rightarrow Q(s)$ des diskreten Systems $D_*(z)$.

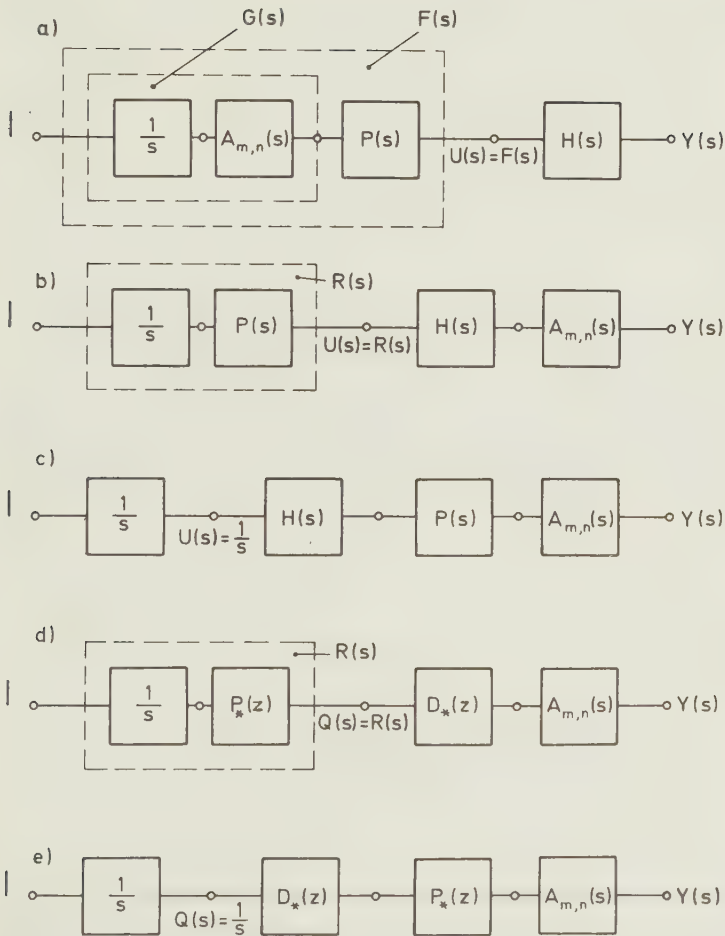


Bild 7/16: Zur Erweiterung des Simulationssystems
(Erweiterung 2 und 3)

Die Reihenfolge der Teilsysteme im erweiterten Simulationssystem nach Bild 7/16d lautet:

- 2.1) die Erzeugung der Treppenfunktion $R(s)$,
 - a) Sprungerzeugung $\frac{1}{s}$,
 - b) diskretes System $P_*(z)$,
- 2.2) das diskrete Simulationssystem $D_*(z)$,
- 2.3) das kontinuierliche Zusatzsystem $A_{m,n}(s)$.

Die im vorhergehenden Abschnitt erläuterte Ergänzung erweist sich als Sonderfall des erweiterten Systems nach Bild 7/14c, wenn als zulässige Treppenfunktion speziell die Sprungfunktion gewählt wird. Da die Erzeugung von Treppenfunktionen bei moderneren Analogrechnern über digitale Zusatzsysteme erreicht wird, braucht in dem Simulationssystem nach Bild 7/16d das diskrete System $P_*(z)$ nicht explizit mit Hilfe von Abtasthaltegliedern aufgebaut zu werden.

Der Aufbau des diskreten Systems $P_*(z)$ ist aber notwendig, wenn das Simulationssystem in der in Bild 7/16e gezeigten Erweiterung verwendet wird. Dort lautet die Reihenfolge der Teilsysteme:

- 3.1) die Sprungerzeugung $\frac{1}{s}$,
- 3.2) das diskrete Simulationssystem $D_*(z)$,
- 3.3) das diskrete Zusatzsystem $P_*(z)$,
- 3.4) das kontinuierliche Zusatzsystem $A_{m,n}(s)$.

Die in diesem Abschnitt gezeigte Erweiterung erlaubt beispielsweise die exakte Simulation der Reaktion von Leitungszetwerken auf endliche, kontinuierliche Impulse der Moduldauer T , wenn die Impulse als Antwort kontinuierlicher Systeme auf bestimmte Impulsfolgen darstellbar sind. Die Darstellung solcher Impulse ist in (7/16) beschrieben; ein einfacher Impuls dieser Art ist z.B. eine Sinusschwingung endlicher Dauer.

Ergänzende Bemerkung: Aus Bild 7/16e erhält man eine weitere zulässige Ergänzung des Simulationssystems, wenn man statt des diskreten nichtrekursiven Filters $P_*(z)$ mit Speichern der Laufzeit T ein nichtrekursives Filter $C_*(\xi)$ mit Speichern der Laufzeit $\tau = T/a$ (a ganz) setzt. Dem entspricht eine engere Folge $\sum_k c_{*k} g(t - k\tau)$ der gewichteten Eingangsfunktionen. Eine weitere Ergänzung besteht in der Ersetzung von $P_*(z)$ durch das im vorherigen Abschnitt in der Anmerkung angesprochene rekursive Filter $B_{*m,n}(\xi)$.

7.4.4 Verallgemeinerung und abschließende Bemerkungen

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Beispiele für die Erweiterung des ursprünglichen Simulationssystems durch kontinuierliche und diskrete Zusatzsysteme führen offenbar zu folgendem, in Bild 7/17 dargestellten verallgemeinerten Simulationssystem:

- 1) die Erzeugung der Treppenfunktion $R(s)$,
 - a) Sprungerzeugung $\frac{1}{s}$,
 - b) das diskrete System $P_*(z)$,
- 2) das diskrete Simulationssystem $D_*(z)$,
- 3) das diskrete Zusatzsystem $\Delta_*(\xi)$,
 - a) nichtrekursives Digitales Filter $C_*(\xi)$,
 - b) rekursives Digitales Filter $B_{*m,n}(\xi)$,
- 4) das kontinuierliche Zusatzsystem $A_{m,n}(s)$.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Simulationssystems ist eine exakte Simulation des Verhaltens der hier betrachteten Leitungnetzwerke mit Elementarleitungen der Laufzeit T möglich, wenn sich die Eingangsfunktion $e(t)$ als Impulsantwort eines Systems mit der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{1}{s} P_*(e^{sT}) \cdot \Delta_*(e^{sT/a}) \cdot A_{m,n}(s) \\
 &= \int_*(e^{sT/a}) \cdot G(s)
 \end{aligned}
 \tag{7/4.19a}$$

darstellen läßt, das aus einem kontinuierlichen System

$$G(s) = \frac{1}{s} A_{m,n}(s)
 \tag{7/4.19b}$$

und aus einem mit stetigen Speichern der Verzögerungszeit $T = T/a$ (a ganz) aufgebauten Digitalen Filter

$$\Gamma_*(e^{sT/a}) = P_*(e^{sT}) \cdot \Delta_*(e^{sT/a}) \quad (7/4.19c)$$

besteht.

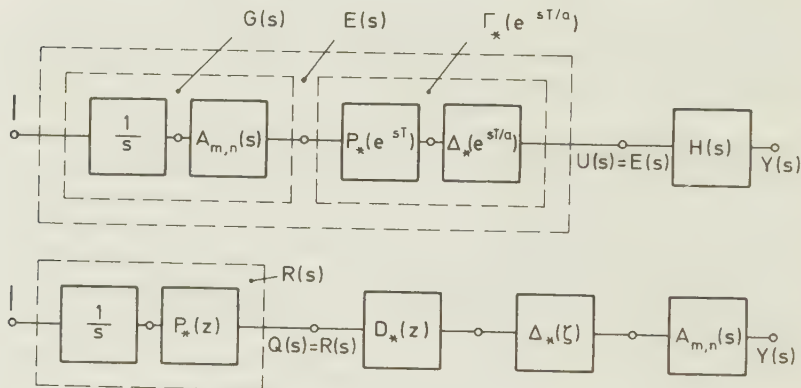


Bild 7/17: Zum verallgemeinerten Simulationssystem

Im begrenzten Rahmen dieser Arbeit kann auf die spezifischen Eigenschaften des verallgemeinerten Simulationssystems nicht näher eingegangen werden. Es sei aber noch zum Abschluß auf das eng verwandte Thema der Interpolation von Abtast- und Treppenfunktionen hingewiesen. Die Aufgabe besteht dort darin, mit Hilfe von Interpolationsschaltungen kontinuierliche Funktionsverläufe anzunähern. Das Schulbeispiel dafür ist die Rekonstruktion abgetasteter Signale mit einem idealen Tiefpaß, wobei nach dem Abtasttheorem die Relation zwischen Bandbreite und Abtastrate zu beachten ist. Neben der Interpolation mit speziellen stetigen Filtern, siehe auch (7/17), gibt es auch die Interpolation mit diskreten Schaltungen, mit denen beispielsweise eine Treppenfunktion feiner gegliedert werden kann (7/13). Der Vergleich mit den Zusatzsystemen des Simulationsmodells zeigt, daß diese Zusatzsysteme nichts anderes als spezielle Interpolationsschaltungen zur Erzeugung gewünschter Funktionen sind.

7.5 Beispiele

7.5.1 Überblick

Die behandelten Beispiele beziehen sich auf die im vierten Kapitel vorgestellten Schaltungen zur Impulsanpassung und zur Impulsverkürzung, wobei als impulsverkürzende Schaltung eine aus zwei Elementarleitungen bestehende Kaskade verwendet wird. Die zu untersuchenden Schaltungen besitzen so die gleiche, durch die Kette Stoßstelle-Elementarleitung-Stoßstelle-Elementarleitung-Stoßstelle beschriebene Struktur und lassen sich durch eine gemeinsame Schaltgruppe am Analogrechner darstellen. Der Unterschied der Einzelschaltungen liegt in der Art der Stoßstellen und der Größe der Wellenwiderstände der Leitungen. Um das Verhalten der verschiedenen Netzwerke vergleichen zu können, werden als Eingangssignale Impulse gleicher Grundform verwendet.

Die Simulationsbeispiele sind mit dem iterativen Präzisionsanalogrechner Typ RA 770 der Firma Telefunken durchgeführt worden.

7.5.1.1 Das verwendete Abtasthalteglied

Für die Realisierung der Zeitverzögerung wird ein Abtasthalteglied in Parallelkonfiguration benutzt; Bild 7/18 zeigt die Prinzipskizze, den Impulsplan für die Schaltersteuerung und die aufgebaute Schaltung.

Zum Prinzip: In der Skizze nach Bild 7/18a wird der Kondensator C_I über den Schalter S_I während der Zeit $kT < t \leq (k+1)T$ auf den Endwert $u_1((k+1)T)$ aufgeladen (Funktion Folgen). Der vom Eingang durch den Schalter S_{II} abgetrennte Kondensator C_{II} wird über den Schalter S_D abgefragt; C_{II} hat den vorherigen Endwert $u_1(kT)$ gespeichert (Funktion Halten). Die Schalterstellungen ändern sich nach jeder Zeit T , wobei C_I und C_{II} ihre Rollen vertauschen. Nach der Zykluszeit $2T$ ist die ursprüngliche Lage wieder erreicht.

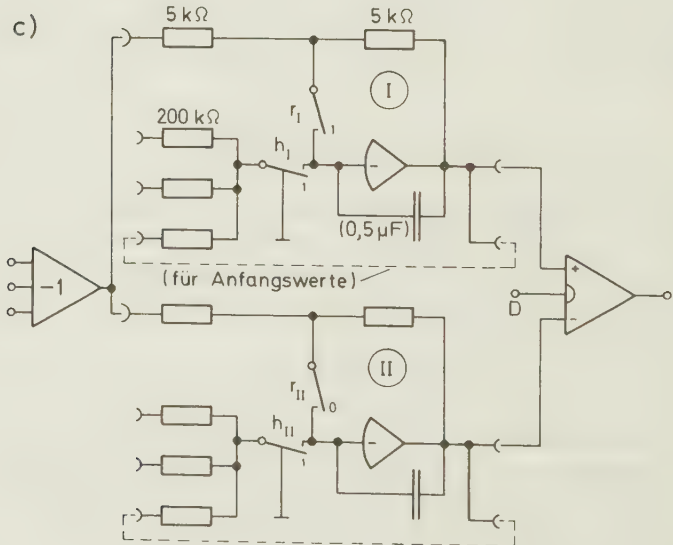
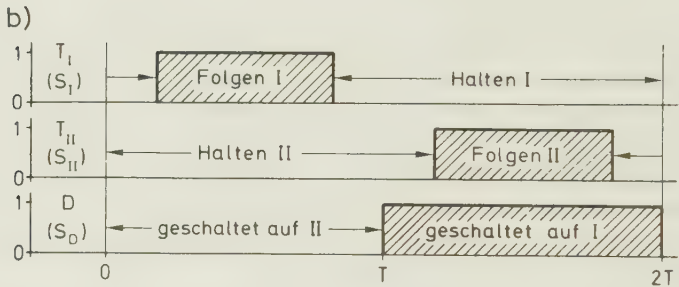
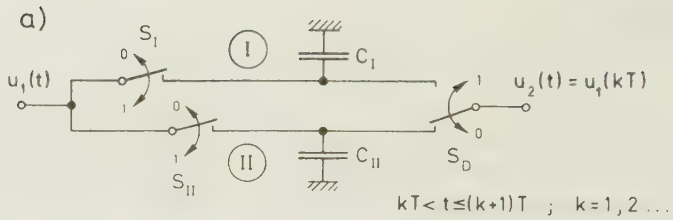


Bild 7/18: Zur Erläuterung des benutzten Abtasthaltegliedes

Bei realen Abtasthaltegliedern ist die höchstmögliche Folgezeit T zu verringern, um sicherzustellen, daß sich die Folgezustände nicht überlappen und nur Kondensatoren im Zustand Halten abgefragt werden. Der in Bild 7/18b gezeigte Impulsplan bezieht sich auf das tatsächlich aufgebaute Abtasthalteglied. In der angegebenen Schaltung übernehmen die Relaiskontakte r_I, r_{II} die Funktion des Schalters $S_{I,II}$. Der Digital-Analogschalter D übernimmt die Funktion des Schalters S_D ; er darf aus Gründen der Genauigkeit nur hochohmig belastet werden, z.B. durch den Eingangswiderstand eines nachfolgenden Verstärkers. Über die Relaiskontakte $h_{I,II}$ können Anfangswerte in die Integrierer-Netzwerke eingegeben werden (Bild 7/18c).

Bei der verwendeten Parallelkonfiguration steht fast die gesamte Verzögerungszeit T für das Aufladen zur Verfügung, bei der Serienkonfiguration im Mittel bekanntlich nur die Zeit $T/2$. Da der ausgangsseitige Schalter (S_D bzw. D) stets nur auf Kondensatoren im Zustand Halten durchgeschaltet ist, tritt in der treppenförmigen Ausgangsspannung der Aufladevorgang bei Abtasthaltegliedern in Parallelkonfiguration nicht in Erscheinung. Es muß noch bemerkt werden, daß bei der Verzögerung keine Vorzeichendrehung auftritt.

7.5.1.2 Die untersuchte Schaltgruppe

Der Koppelplan der untersuchten Schaltgruppe ist in Bild 7/19a dargestellt. Durch die jeweilige Lage der Schalter S_0 bis S_3 werden die Art der Schaltung und die Betriebsverhältnisse festgelegt. Die Schalter S_0 und S_3 bestimmen, ob der Quelleninnenwiderstand R_0 bzw. der Lastwiderstand R_L größer oder kleiner als der Wellenwiderstand Z der angeschlossenen Leitung ist. Es gilt folgende Zuordnung:

S_0	Betriebszustand	S_3	Betriebszustand
0	$R_0 > Z_{(1)}$	0	$Z_{(2)} > R_L$
1	$R_0 < Z_{(1)}$	1	$Z_{(2)} < R_L$

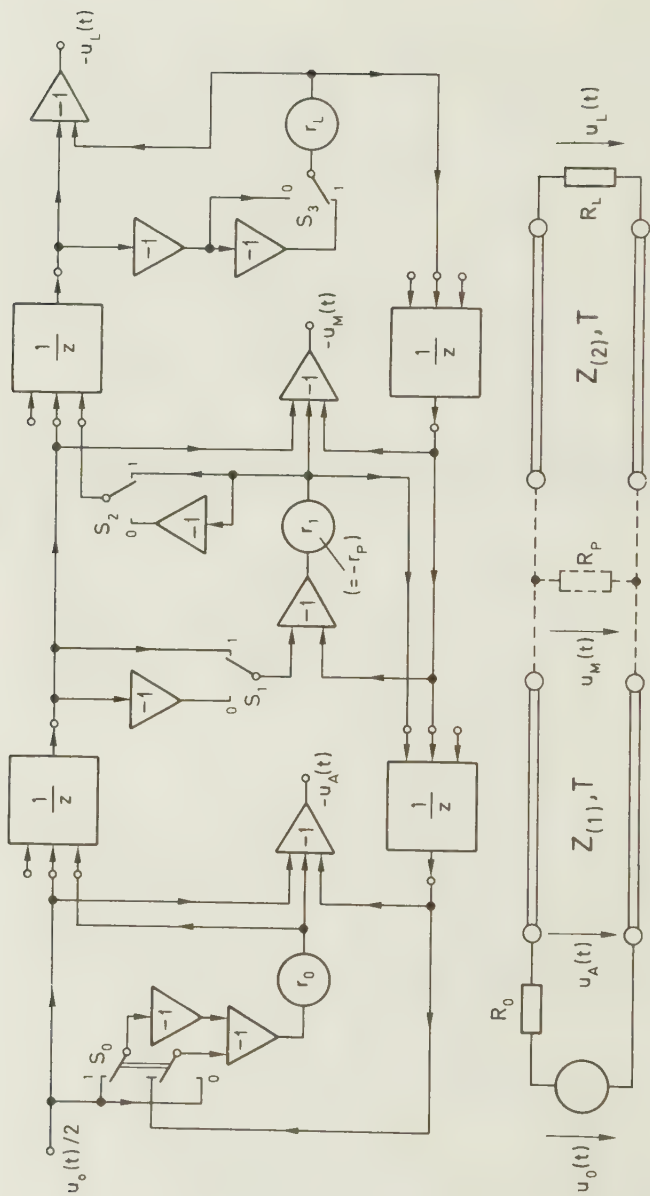


Bild 7/19: Koppelplan und Beispiel der untersuchten Schaltgruppe

Über die Schalter S_1 und S_2 wird der Typ der die Elementarleitungen verbindenden Stoßstelle eingestellt. Es führen alle Schalterkombinationen zu realisierbaren Stoßstellen. Folgende Fälle sind möglich: die Elementarleitungen besitzen den gleichen Wellenwiderstand Z und sind über einen Serienwiderstand R_S miteinander verbunden; die Elementarleitungen haben unterschiedliche Wellenwiderstände Z_1 und Z_2 und stoßen unmittelbar aufeinander; die Elementarleitungen besitzen den gleichen Wellenwiderstand Z und an ihrer Verbindungsstelle liegt ein Parallelwiderstand R_P . Die Zuordnung lautet:

S_1	S_2	Typ der mittleren Stoßstelle
0	0	Serienwiderstand R_S ; $Z_1 = Z_2 = Z$
0	1	Wellenwiderstandssprung; $Z_1 < Z_2$
1	0	" ; $Z_1 > Z_2$
1	1	Parallelwiderstand R_P ; $Z_1 = Z_2 = Z$

Durch die eingezeichneten Schalterstellungen in Bild 7/19a wird die in Bild 7/19b gezeigte Schaltung simuliert, wobei der Quelleninnenwiderstand R_0 kleiner, der Lastwiderstand R_L größer als der Leitungswellenwiderstand Z ist.

7.5.1.3 Die simulierten Eingangssignale

Außer rechteckförmigen Signalen der Treppendauer T , die unmittelbar als Eingangsgrößen des verwendeten diskreten Simulationssystems $D_*(z)$ zugelassen sind, werden als Eingangssignale der untersuchten Leitungsnetzwerke kontinuierliche Impulse bzw. Impulsfolgen simuliert, die durch die in Abschnitt 7.4 erläuterten Zusatzsysteme dargestellt werden. Zunächst wird als Zusatzsystem nur das kontinuierliche System betrachtet, woraufhin dann die Erweiterung zu dem in Abschnitt 7.4.4 diskutierten verallgemeinerten Simulationssystem erfolgt. Um die Veränderung der kontinuierlichen Eingangssignale durch Reflexion und Brechung im Leitungsnetzwerk verfolgen zu können, wird den Signalen ein kurzer

Impuls endlicher Dauer zu Grunde gelegt. Über die Erzeugung solcher Impulse durch stetige Filter ist von Gerst und Diamond in (7/16) berichtet worden. Man gewinnt sie mit einer Anordnung bestehend aus einem digitalen und einem kontinuierlichen Filter.

Wir wenden uns nun den im ersten Teil der Beispielgruppe verwendeten kontinuierlichen Signalen zu.

Für das in Gl.(7/4.11) beschriebene kontinuierliche System $A_{m,n}(s)$ wird ein Butterworth-Filter dritten Grades verwendet:

$$A_I(s) = A_{m,n}(s) = \frac{k'}{(s+1)(s^2+s+1)} . \quad (7/5.1)$$

Es besitzt die Pole

$$s_{\infty 1} = -1 , \quad s_{\infty 2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} ;$$

der Faktor k' dient als Skalierungsfaktor, über den später frei verfügt wird.

Das in Gl. (7/4.12) beschriebene kontinuierliche System $G(s)$ lautet hier

$$G_I(s) = \frac{k'}{s(s+1)(s^2+s+1)} ; \quad (7/5.2)$$

es besitzt den zusätzlichen Pol

$$s_{\infty 4} = 0 .$$

Das simulierte Eingangssignal ist eine Folge von gewichteten und zeitlich versetzten Impulsantworten des Systems $G_I(s)$. Es lautet in der allgemeinen Formulierung der Gl.(7/4.15) im Zeitbereich

$$f(t) = \sum_{i=1}^I p_i g(t-iT).$$

Die Koeffizienten p_i sind nun so zu bestimmen, daß $F(s)$ eine ganze Funktion ist (7/16).

Die Form der ermittelten Treppenfunktion $r_I(t)$ und des erzeugten Impulses $f_I(t)$ sind in Bild 7/21 zu erkennen; die betreffenden Funktionen sind dort mit $g_2(t)$ bzw. $g_3(t)$ bezeichnet, der Faktor a hat den Wert $a=1$.

Die Treppenfunktion $r_I(t)$ läßt sich als gewichtete Folge zeitlich versetzter Rechteckimpulse der Dauer T auffassen:

$$r_I(t) = \sum_{k=0}^3 d_k \left(\delta_{-1}(t-kT) - \delta_{-1}(t-(k+1)T) \right) \quad (7/5.4)$$

Die Koeffizienten d_k haben die Werte

$$d_0 = \quad \quad \quad p_0 = 0,5000,$$

$$d_1 = \quad \quad \quad p_1 + p_0 = -0,5769,$$

$$d_2 = \quad \quad \quad p_2 + p_1 + p_0 = 0,3285,$$

$$d_3 = \quad \quad \quad p_3 + p_2 + p_1 + p_0 = -0,0677.$$

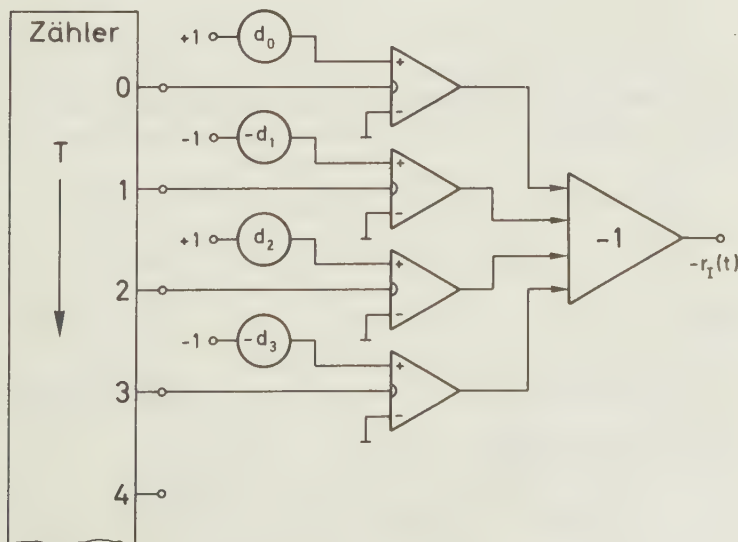


Bild 7/20: Die Erzeugung der Treppenfunktion $r_I(t)$

Die im Raster kT gegliederte Treppenfunktion $r_I(t)$ kann unmittelbar als Eingangsfunktion $q_I(t)$ des diskreten Simulationssystems $D_*(z)$ entsprechend Gl.(7/4.5) verwendet werden. Bild 7/20 zeigt die für die Beispiele benutzte Schaltung: je nach Zählerstellung schaltet der betreffende Digital-Analog-Schalter die über den Koeffizienten d_k eingestellte Spannung zum Ausgang durch. Die Reihenfolge der Teilsysteme des erweiterten Simulationssystems entspricht der unter dem Punkt 2) in Abschnitt 7.4.3 erläuterten Gruppierung.

Im zweiten Teil der Beispielgruppe wird ein Eingangsimpuls $e_{II}(t)$ simuliert, der dieselbe Form wie der eben beschriebene Impuls $f_I(t)$ hat, aber nur die halbe Impulsdauer besitzt:

$$e_{II}(t) = f_I(2t) \quad . \quad (7/5.5)$$

Zur Herleitung der Zusatzsysteme betrachten wir zunächst den allgemeineren Fall

$$e(t) = f_I(at) \quad , \quad (7/5.6a)$$

der für $a=2$ in den gewünschten Spezialfall übergeht. Über den Ähnlichkeitssatz der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F_I(s), \\ f(at) &\longleftrightarrow \frac{1}{a} \cdot F_I\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad (7/5.6b) \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s} \cdot P_I\left(\frac{s}{a}\right) \cdot A_I\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \\ &= \frac{1}{s} \cdot P_I\left(\frac{s}{a}\right) \cdot A_{m,n}\left(\frac{s}{a}\right) \quad . \end{aligned}$$

Gemäß Gl.(7/4.19) lautet das neue kontinuierliche Zusatzsystem

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot A_{m,n}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7/5.7)$$

und das diskrete Zusatzsystem

$$\begin{aligned} \Gamma_*(e^{sT/a}) &= \sum_{i=1}^4 P(I)_i \cdot e^{-isT/a} , \\ &= P_{II}(e^{sT}) \cdot \Delta_*(e^{sT/a}) . \end{aligned} \quad (7/5.8a)$$

Gl.(7/5.8) läßt sich mit der Abkürzung

$$\zeta = e^{sT/a}$$

und der Gl.(7/5.4) auch in der Form

$$\Gamma_*(\zeta) = (1-\zeta^{-1}) \cdot \sum_{x=0}^3 d_x \cdot \zeta^{-x} \quad (7/5.8b)$$

angeben. Für die Aufspaltung des Digitalen Filters $\Gamma_*(\zeta)$ in die durch Gl.(7/4.19c) beschriebenen Anteile gibt es mehrere Möglichkeiten; wir wählen den für die Fälle $a=1,2$ und 4 geltenden Ansatz

$$\begin{aligned} P_*(z) &= (1-z^{-4/a}) = (1-\zeta^{-4}) \\ &= (1-\zeta^{-1})(1+\zeta^{-1}+\zeta^{-2}+\zeta^{-3}) \end{aligned} \quad (7/5.9)$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \Delta_*(\zeta) &= \frac{\Gamma_*(\zeta)}{P_*(z)} \\ &= \frac{\sum_{x=0}^3 d_x \cdot \zeta^{-x}}{\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1} . \end{aligned} \quad (7/5.10)$$

Bild 7/21 zeigt die Erzeugung des durch Gl.(7/5.6) beschriebenen Impulses. Die Treppenfunktion

$$g_1(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - \frac{4}{a}T) \quad (7/5.11a)$$

ist Eingangsfunktion des Digitalen Filters $\Delta_*(\zeta)$, an dessen Ausgang sich die im Raster $\kappa\tau = \kappa T/a$ gegliederte Treppenfunktion

$$g_2(t) = \sum_{\kappa=0}^3 d_{\kappa} \left(\delta_{-1}(t - \kappa\tau) - \delta_{-1}(t - (\kappa+1)\tau) \right) \quad (7/5.11b)$$

ergibt. Diese Funktion ist Eingangsfunktion des kontinuierlichen Systems $A_{m,n}(s'=s/a)$, an dessen Ausgang der gewünschte kontinuierliche Impuls

$$g_3(t) = e(t) = f_I(at) \quad (7/5.11c)$$

erscheint. Der Amplitudenfaktor k' ist so gewählt, daß die kontinuierliche Ausgangsfunktion die gleiche Amplitude wie der Rechteckimpuls $g_1(t)$ besitzt. Die durch Gl.(7/5.9) getroffene Wahl für die Funktion $P_*(z)$ hat den Vorteil, daß die kontinuierliche Funktion $g_3(t)$ dieselbe Dauer wie der erzeugende Rechteckimpuls $g_1(t)$ besitzt. Die Erregung des Netzwerks durch Impulse der rechteckigen Form $g_1(t)$ läßt sich so sehr leicht mit der Erregung durch Impulse der kontinuierlichen Form $g_3(t)$ vergleichen.

Im Gegensatz zur Erregung beim ersten Teil der Beispielgruppe, die durch den Parameter $a=1$ gekennzeichnet ist, ist bei dem zweiten Teil der Beispielgruppe ($a=2$) die Eingangsfunktion $g_2(t)$ des kontinuierlichen Systems im engeren Raster $\kappa T/2$ gegliedert. Sie kann daher nicht als Eingangsfunktion des diskreten Simulationssystems $D_*(z)$ verwendet werden, sondern muß bei der Simulation durch ein dem Simulationssystem $D_*(z)$ nachgeschaltetes diskretes Zusatzsystem $\Delta_*(\zeta = z^{1/2})$ erzeugt werden. Lediglich für den Parameter $a=1$ kann das System $\Delta_*(\zeta=z)$ auch vor das Simulationssystem $D_*(z)$

geschaltet werden; zweckmäßigerweise wird es aber dann ganz fallengelassen und statt dessen die Erzeugung der Treppenfunktion mit Hilfe der in Bild 7/20 gezeigten Schaltung vorgenommen.

Als Eingangsfunktion $q_{II}(t)$ des Simulationssystems $D_*(z)$ wird bei der zweiten Beispielgruppe speziell der Rechteckimpuls

$$r_{II}(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2T) \quad (7/5.12a)$$

und die Rechteckimpulsfolge

$$r_{III}(t) = \sum_{v=0}^2 r_{II}(t-vT) \quad (7/5.12b)$$

gewählt, wobei zur Erläuterung der Impulsanpassung der Rechteckimpuls $r_{II}(t)$ und zur Veranschaulichung der Impulsverkürzung die aus drei Rechteckimpulsen gebildete Impulsfolge $r_{III}(t)$ verwendet werden.

Mit dem erläuterten Beispiel eines verallgemeinerten Simulationssystems kann außer dem Fall $a=1$ und $a=2$ noch der Fall $a=4$ behandelt werden, wobei für die Fälle $a=2$ und $a=4$ das diskrete Zusatzsystem $\Delta_*(\zeta)$ dem Simulationssystem $D_*(z)$ nachgeschaltet werden muß. Der Aufbau des diskreten Zusatzsystems $\Delta_*(\zeta)$ kann aber umgangen werden, wenn jedes Abtasthalteglied des Simulationssystems $D_*(z)$ durch a Abtasthalteglieder der Verzögerungsdauer $\tau=T/a$ ersetzt wird. Bei der behandelten Schaltgruppe, die insgesamt nur vier Abtasthalteglieder enthält, sind für den Fall $a=2$ zusätzlich vier und für den Fall $a=4$ zusätzlich zwölf Abtasthalteglieder notwendig, während das verwendete Zusatzsystem $\Delta_*(\zeta)$ jeweils nur drei Abtasthalteglieder benötigt: Bei umfangreichen Leitungsnetzwerken erscheint der Aufbau eines diskreten Zusatzsystems günstiger als die Mehrfachersetzung von Abtasthaltegliedern.

7.5.2 Schaltung zur Impulsanpassung

In den folgenden Bildern 7/22 bis 7/25 wird an Hand von Oszillogrammen das in Abschnitt 4.2 theoretisch untersuchte Verhalten der Impulsanpassungsschaltung verdeutlicht. Die in Gl.(4/2.2) und Gl.(4/2.8b) genannten Reflexionsfaktoren haben die Werte

$$r = r_o = r_L = \sqrt{3} - 1 \approx 0,7320 . \quad (7/5.13a)$$

Der Transmissionsfaktor zwischen Quelle und Leitung bzw. zwischen Leitung und Lastwiderstand hat demnach den Wert

$$1 + r = \sqrt{3} \approx 1,7320 . \quad (7/5.13b)$$

Das bedeutet: die Amplitude einer von der Quelle zum Lastwiderstand laufenden Welle erhöht sich bei der nichtangepaßten Schaltung auf das dreifache; und da die Leerlaufspannung der Quelle die doppelte Amplitude der Quellwelle besitzt, ergibt sich auf Grund der genannten Wanderwelle am Lastwiderstand eine Spannung, die gleich dem Eineinhalbfachen der Leerlaufspannung ist. Dieser Sachverhalt wird auch durch die in Gl.(4/2.3) angegebene Übertragungsfunktion ausgedrückt, die nun die Form

$$H_*(z) = \frac{U_L}{U_o} = \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{z^4 + 0,5358...} \quad (7/5.14)$$

annimmt.

Die Verhältnisse der nichtangepaßten Schaltung werden durch Bild 7/22 veranschaulicht. In der ersten und zweiten Bildzeile sind in zwei verschiedenen Zeitmaßstäben die Reflexionsvorgänge bei einem kontinuierlichen Eingangsimpuls abgebildet. Die dritte Bildzeile gibt die Reaktion auf eine treppenförmige Erregung an; die dort gezeigten Funktionen stellen gleichzeitig die Meßgrößen des in Bild 7/19a gezeigten

digitalen Simulationssystems dar, dessen Eingangsfunktion durch Gl.(7/5.4) bestimmt ist. Die Meßgrößen sind die Eingangsfunktionen des in Gl.(7/5.1) angegebenen kontinuierlichen Zusatzsystems, an dessen Ausgang die kontinuierlichen Funktionen erscheinen; die gegenseitigen Relationen werden durch die Oszillogramme der zweiten und dritten Bildzeile aufgezeigt.

Da die gewählte Eingangsimpulsdauer mit der Zeit für einen Hin- und Rücklauf einer Welle übereinstimmt, erscheint am Anfang der Leitung unmittelbar nach dem ersten Impuls bereits die Reaktion auf die Reflexion am Ausgang. Da der Ausgangsreflexionsfaktor r_L positiv ist, tritt bei der Reflexion am Ausgang keine Vorzeichendrehung auf; d.h. der erste rücklaufende Impuls hat positives Vorzeichen, wie auch der Spannungsverlauf $u_M(t)$ auf der Mitte der Leitung erkennen läßt. Der Innenwiderstand R_0 der Quelle ist aber kleiner als der Wellenwiderstand Z der Leitung. Deshalb erfährt der rücklaufende Impuls eine Vorzeichendrehung und erscheint mit negativer Amplitude am Ausgang, wo er wieder reflektiert wird usw. Wegen der Dämpfung durch die Widerstände ergibt sich ein allmähliches Abklingen, wie aus den Oszillogrammen der ersten Bildzeile zu entnehmen ist.

Die Bilder 7/23 und 7/24 zeigen die entsprechenden Aufnahmen für die impulsangepaßte Schaltung, wobei in Bild 7/24 auf die nochmalige Wiedergabe des Eingangsimpulses verzichtet wurde. Die beiden Schaltungen zeigen zwar das gleiche Übertragungsverhalten zwischen Quelle und Lastwiderstand, die Vorgänge im Inneren sind jedoch voneinander verschieden. Durch das Einfügen der Widerstände in die Leitungsmitte ergibt sich unter Berücksichtigung der Widerstandswerte entsprechend Gl.(4/2.8a) bzw. Gl.(4/2.12) und mit der in Gl.(7/5.13) getroffenen Wahl für die Reflexionsfaktoren als Übertragungsfunktion gemäß Gl.(4/2.9) bzw. Gl.(4/2.11) der Ausdruck

$$H_*(z) = H_{P*}(z) = H_{S*}(z) = \frac{3}{4} z^{-2} \quad (7/5.15)$$

Die Parameter der in Gl.(4/2.1) allgemein angegebenen Übertragungsfunktion impulsangepaßter Elementarleitungsnetzwerke nehmen also hier die speziellen Werte $d=2$ und $h_d=3/4$ an.

Für den nun folgenden zweiten Teil der Beispielgruppe wird als Eingangsfunktion des digitalen Simulationssystems nicht mehr die durch Gl.(7/5.4) beschriebene Treppenfunktion $r_I(t)$ verwendet, sondern die durch Gl.(7/5.12) gekennzeichneten Rechteckimpulse $r_{II}(t)$ und $r_{III}(t)$ der Dauer $2T$ bzw. $6T$. Der kontinuierliche Impuls wird nun durch das gesamte in Bild 7/21 gezeigte Zusatzsystem erzeugt.

Das erste Anwendungsbeispiel ist die nichtangepaßte Schaltung, deren Reaktion auf einen Eingangsimpuls der Dauer $4T$ bereits in Bild 7/22 gezeigt wurde. Bild 7/25 zeigt die Verhältnisse bei einem Eingangsimpuls der Dauer $2T$, wobei die erste Bildzeile unmittelbar die Meßgrößen des unveränderten digitalen Simulationssystems angibt und die zweite Bildzeile die Funktionen am Ausgang des Zusatzsystems.

7.5.3 Schaltung zur Impulsverkürzung

Zur Erläuterung der Vorgänge in einer impulsverkürzenden Schaltung aus zwei Elementarleitungen dienen die Bilder 7/26 und 7/27. In Bild 7/26 ist das Verhalten der idealen dämpfungsfreien Schaltung verdeutlicht; Bild 7/27 zeigt das Verhalten bei verletzten Betriebsbedingungen.

Die theoretische Untersuchung der Kaskadenschaltung findet sich in Abschnitt 4.3.2. Nach Gl.(4/3.17) ergibt sich für den betrachteten Fall eine Verkürzung η auf ein Drittel und nach Gl.(4/3.20) eine Erhöhung g der Amplitude auf das Dreifache: $\eta=1/g=1/3$, $g=3$. Nach Gl.(4/3.14) muß sich dann der Eingangsimpuls aus einer Folge von $g=3$ Teilimpulsen zusammensetzen, wobei die Teilimpulse gegeneinander um die Zeit $\alpha T=2T$ zu verschieben sind (der Wert α folgt aus Gl.(4/3.19)). Am Ausgang der Schaltung erscheint dann mit veränderter Amplitude nach der Zeit $2T$ gerade einer der drei Teilimpulse des

Eingangssignals. In Bild 7/26 sind drei verschiedene Teilimpulse der Dauer $2T$ behandelt: in der ersten Bildzeile ein Rechteckimpuls, in der zweiten ein kontinuierlicher Impuls und in der dritten ein treppenförmiger Impuls. Die zweite Bildspalte zeigt, daß sich die Mittenspannung $u_M(t)$ jeweils aus zwei Teilimpulsen aufbaut, deren Amplitude gegenüber der Eingangsspannung $u_0(t)$ um das Eineinhalbfache erhöht ist.

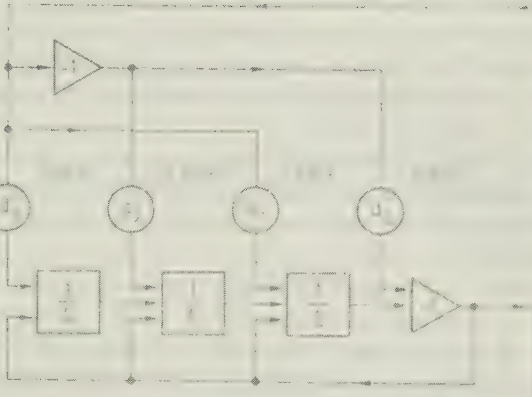
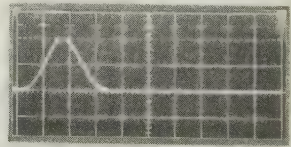
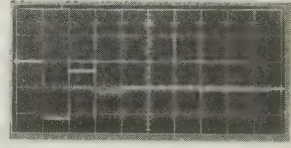
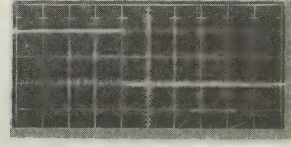
Bei der Simulation der vorliegenden Schaltung erscheinen die zu einer Bildspalte gehörenden Funktionsverläufe gleichzeitig an verschiedenen Punkten des erweiterten Simulationssystems. Die in der ersten Bildzeile aufgeführten Oszillogramme sind die Meßgrößen des in Bild 7/19a gezeigten digitalen Simulationssystems, das bekanntlich nur Treppenfunktionen im Raster kT verarbeiten kann. Die Oszillogramme der zweiten und dritten Bildzeile sind die Ausgangsgrößen der in Bild 7/21 gezeigten Zusatzsysteme, wobei die zweite Zeile die Ausgangsgröße des gesamten Systems angibt. In der dritten Zeile sind die Ausgangsfunktionen des digitalen Zusatzsystems abgebildet, nämlich die im engeren Raster $\kappa T = \kappa T/2$ gegliederten Treppenfunktionen.

Bei der in Bild 7/27 gezeigten Schaltung sind statt der nach Gl.(4/3.24) geforderten Festsetzung der Reflexionsfaktoren r_0 und r_L auf den Wert Eins die Werte von Gl.(7/5.13) für die impulsangepaßte Schaltung übernommen worden. Statt ausgangseitigem Leerlauf und eingepprägter Spannung liegt nun der Fall vor, daß die Leitungskaskade zwischen Widerständen betrieben wird, die eine Dämpfung hervorrufen. Durch die derart verletzten Betriebsbedingungen ergeben sich am Ausgang der Schaltung zusätzliche Impulse; außerdem wird die Amplitude des Hauptimpulses verringert. Bei den im Bild 7/27 gezeigten Auswirkungen ist aber zu beachten, daß die getroffene Wahl der Reflexionsfaktoren bereits eine erhebliche Fehldimensionierung darstellt: statt

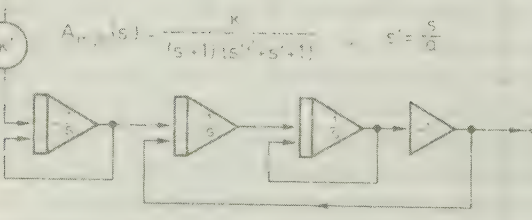
$$\frac{R_0}{Z_1} = \frac{Z_2}{R_L} = 0 \quad \text{gilt hier} \quad \frac{R_0}{Z_1} = \frac{Z_2}{R_L} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \approx 0,154.$$

$$g_1(t) = \frac{1}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{T} t} \right)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{T} t} \right)$$



$$A_{\text{eff}}(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+s'+1)}$$



$$g_1(t) = \frac{1}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q}{T} t} \right)$$

$$G_1(s) = A_{\text{eff}} \left(\frac{s}{Q} \right) \Delta_{\text{eff}} \left(e^{\frac{sT}{Q}} \right) G_2(s)$$

Bild 7/21: Die Umwandlung eines Rechteckimpulses in einen kontinuierlichen Impuls gleicher Dauer und Amplitude

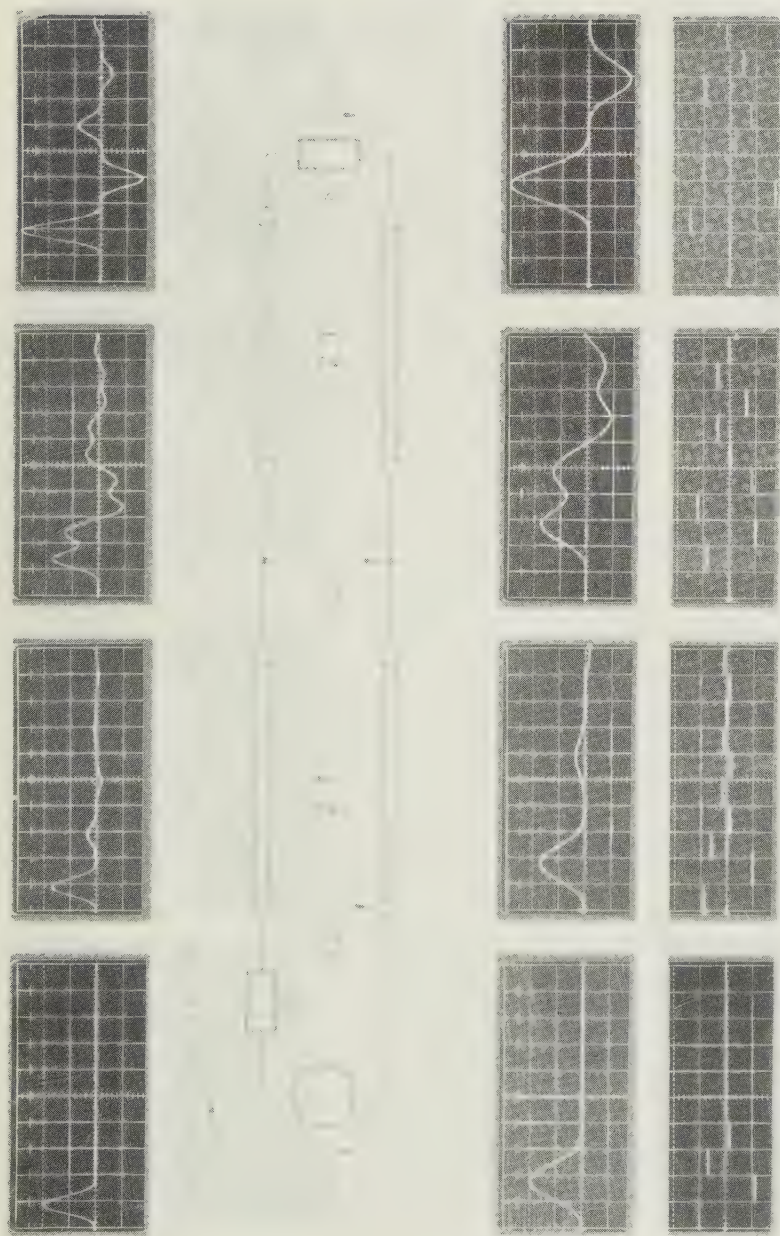


Bild 7/22: Impulsverhalten der nichtangepaßten Schaltung
(Eingangsimpuls Dauer $4T$)

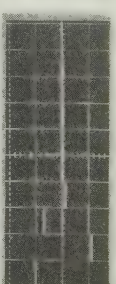
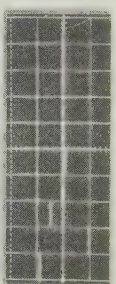
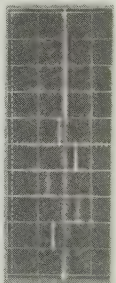
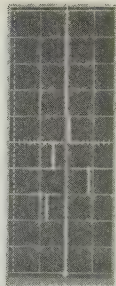
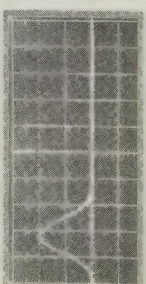
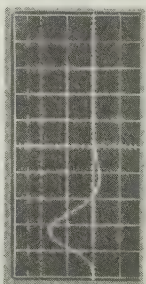
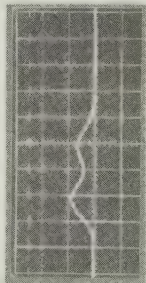
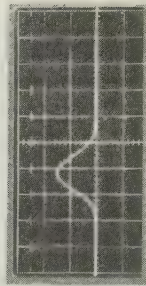
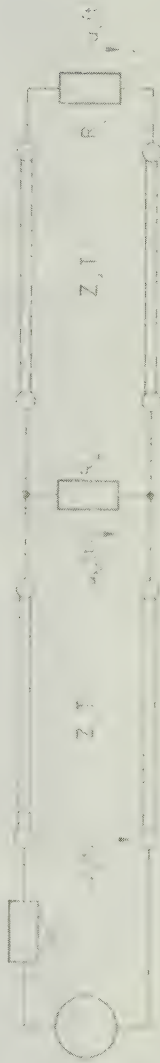
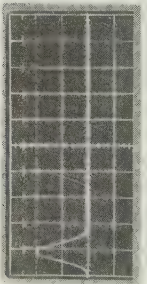
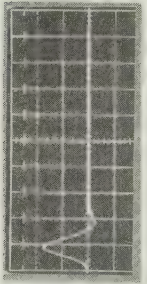
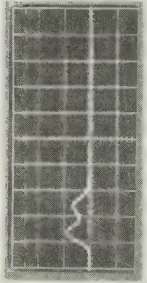
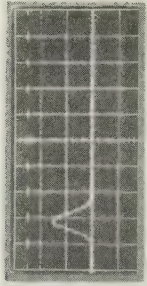


Bild 7/23: Anpassung durch Parallelwiderstand

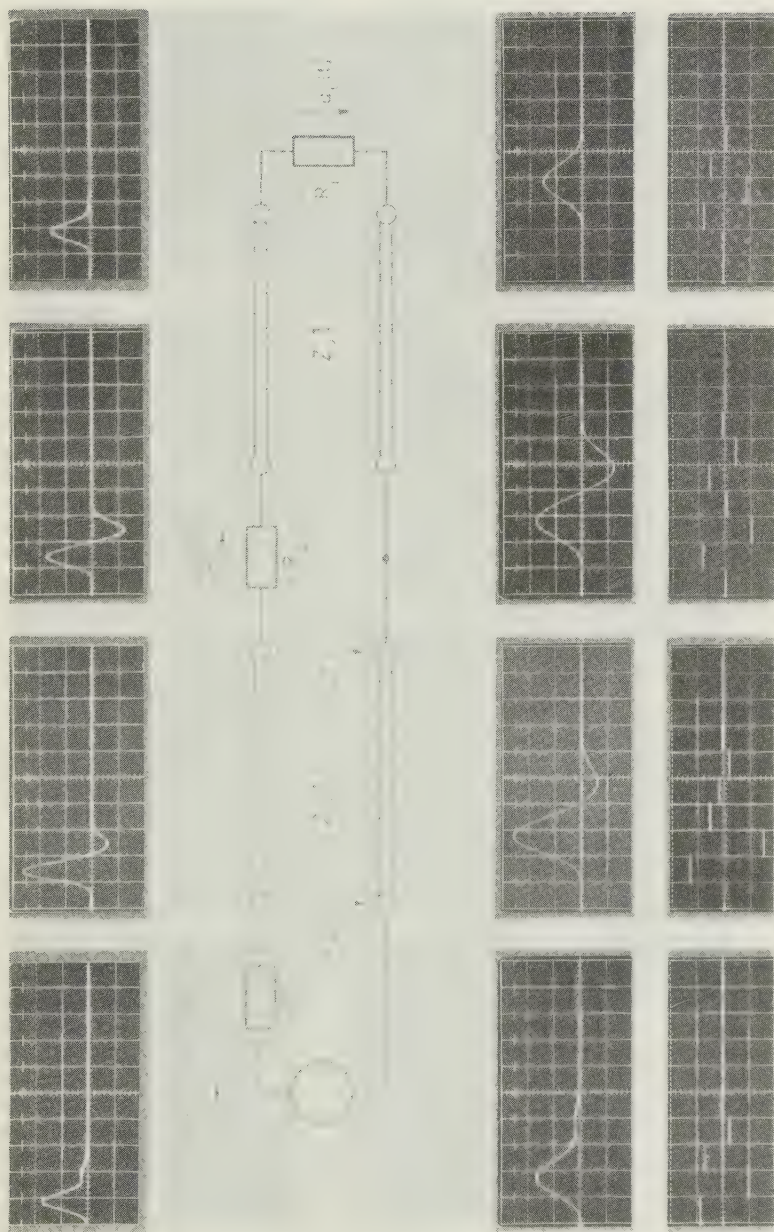


Bild 7/24: Anpassung durch Serienwiderstand

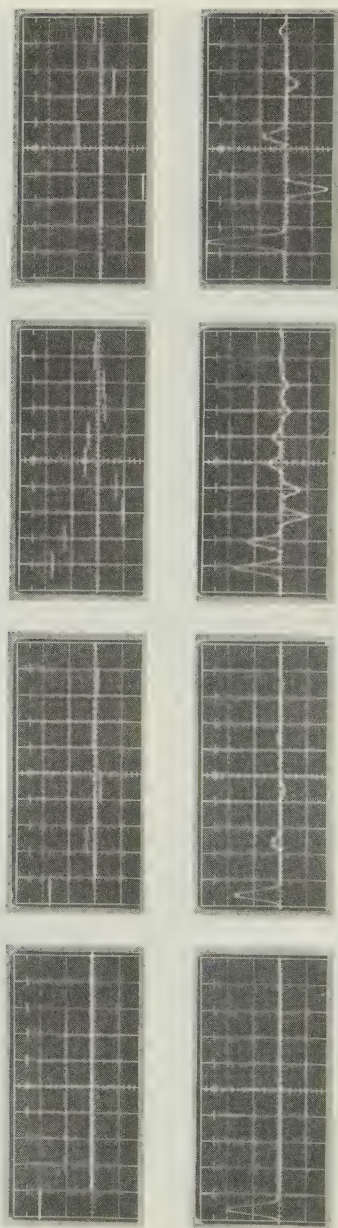


Bild 7/25: Impulsverhalten der nichtangepaßten Schaltung
(Eingangsimpuls Dauer 2T)

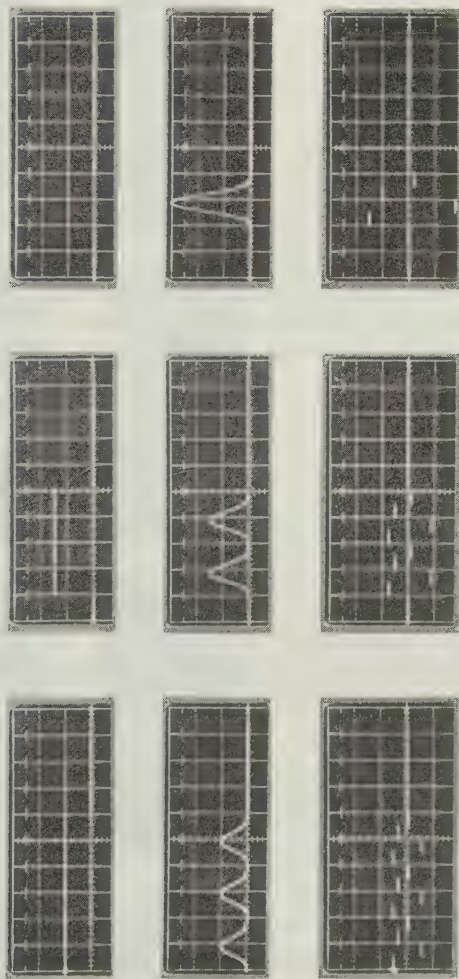


Bild 7/26: Ideale impulsverkürzende Schaltung

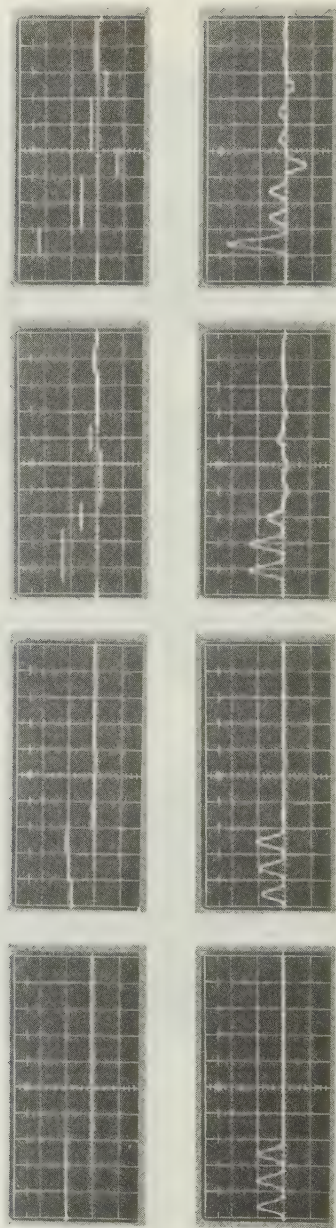


Bild 7/27: Impulsverkürzung bei verletzten Betriebsbedingungen

8. Entwicklung eines automatischen Verfahrens zur Analyse von Signalflußgraphen

8.1 Allgemeines

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der automatischen Analyse von Signalflußgraphen und mit der Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens auf Leitungsnetzwerke zur Gewinnung der Übertragungsfunktion.

Unter der Analyse eines Signalflußgraphen versteht man allgemein das bereits bei der Einführung in die Signalflußgraphenmethode in Abschnitt 3.1 formulierte Problem, das dem Signalflußgraphen zugeordnete lineare Gleichungssystem

$$\underline{V} = \underline{G} \underline{V} + \underline{V}' \quad (8/1.1)$$

zu lösen. Das formale algebraische Ergebnis ist

$$\underline{V} = (\underline{E} - \underline{G})^{-1} \underline{V}' = \underline{F} \underline{V}' \quad , \quad (8/1.2)$$

wobei das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Übertragungsmatrix $\underline{F}$ die Übertragungsfunktion V_i/V_j' zwischen der externen Quelle V_j' und dem inneren Knoten V_i angibt.

Im engeren Sinne wird unter der Analyse zumeist die topologische Ermittlung einzelner interessierender Übertragungsfunktionen verstanden, z.B. durch Reduktion des Graphen oder durch Anwendung der Mason-Formel, bei der eine Veränderung des Graphen nicht erforderlich ist. Die Mason-Formel setzt die Kenntnis bestimmter topologischer Strukturen, nämlich Pfade und Schleifen voraus. Sie lautet (siehe z.B. (3/9)):

$$\frac{V_i}{V_j'} = \frac{\sum_{\mu} \left\{ P_{\mu} \left[1 + \sum_1 (-1)^1 \cdot \sum_{\nu} S_{\nu\mu}^{(1)} \right] \right\}}{1 + \sum_1 (-1)^1 \cdot \sum_{\nu} S_{\nu}^{(1)}} \quad (8/1.3)$$

P_{μ} Wert des μ -ten Pfades vom Knoten V_j' zum Knoten V_i ,
d.h. das Produkt der beteiligten Zweiggewichte;

$S_{\nu\mu}^{(1)}$ Wert der ν -ten Schleife 1-ter Ordnung, die den Pfad P_μ nicht berührt.

$S_\nu^{(1)}$ Wert der ν -ten Schleife 1-ter Ordnung, d.h. das Produkt der beteiligten Zweiggewichte der ν -ten Gruppe von 1 sich nicht berührenden Schleifen;

In der Mason-Formel sind die Schleifen nach steigender Schleifenordnung aufgeführt, was am Beispiel des Nenners kurz erläutert sei. Nach dem Glied Eins (das nach (3/3) als Schleife 0-ter Ordnung gedeutet werden kann) kommen zunächst die einfachen Schleifen (Schleifen 1-ter Ordnung), bei denen die Anzahl der beteiligten Zweige, angefangen von den einzeigigen Eigenschleifen bis zu den alle N Knoten durchlaufenden Schleifen, zwischen eins und N liegen kann. Es folgen dann alle Paare von einfachen Schleifen, die sich nicht berühren (Schleifen 2-ter Ordnung); anschließend alle Dreiergruppen von sich nicht berührenden einfachen Schleifen (Schleifen 3-ter Ordnung) usw., wobei die Mindestanzahl der beteiligten Zweige gleich der Ordnungszahl der Schleifengruppe ist: bei einer Schleife 1-ter Ordnung können zwischen 1 und N Zweige beteiligt sein; besteht die Schleife aus m Zweigen, so wird sie abgekürzt als m -Schleife bezeichnet.

Zur Ermittlung der Pfad-Schleifen-Terme des Zählers sind aus den verschiedenen Schleifengruppen, die in den Nenner eingehen, diejenigen Schleifen zu streichen, die den jeweiligen Pfad berühren. Führt der betrachtete Pfad über p Zweige (p -Pfad mit $p=1, \dots, N$; der Zweig von der externen Quelle ist stets vorhanden), so sind p innere Knoten beteiligt und für einen Term nur noch maximal $(N-p)$ -Schleifen zulässig. Enthält ein Pfad-Schleifen-Term m Zweige, so liegt ein m -Pfad-Schleifen-Term vor. Allgemein soll von einer m -Struktur gesprochen werden, wenn das topologische Gebilde m Zweige enthält. Die Struktur ist echt, wenn die Kombination der Zweige zulässig für die Mason-Formel ist; sie heißt unecht oder redundant, wenn die Struktur für die Mason-Formel nicht erlaubt ist.

Während für die Schleifen nur innere Zweige in Frage kommen, ist für die Pfad-Schleifen-Terme noch der Zweig von der externen Quelle zum zugehörigen inneren Knoten zu beachten. Bei der Anwendung von Signalflußgraphen wird aber die Trennung zwischen externer Quelle und zugehörigem inneren Knoten aus Gründen der Vereinfachung zumeist nicht ausdrücklich durchgeführt, da der externe Zweig wegen des Zweiggewichtes Eins für die Werte der Pfade und Pfad-Schleifen-Terme ohne Einfluß ist, bei der Bildung der Schleifen nicht benötigt wird und für die Prüfung auf unerlaubte Berührung allein der innere Knoten maßgebend ist. Zweckmäßigerweise spricht man von einer inneren bzw. eigentlichen m -Struktur, wenn das topologische Gebilde m innere Zweige enthält.

Die Suche der in die Mason-Formel eingehenden Pfade und Schleifen ist bei umfangreichen Signalflußgraphen sehr mühselig und macht die Hilfe eines Digitalrechners notwendig. Für ein von Hohn, Seshu und Aufenkamp vorgeschlagenes Suchverfahren (8/1), haben Till (8/2) und Gill (8/3) Codierungsmethoden zur automatischen Durchführung angegeben. Bei dem Verfahren werden durch Potenzieren der Verknüpfungsmatrix die primären topologischen Strukturen, nämlich die Pfade und Schleifen erster Ordnung bestimmt, aus denen durch Kombination die höheren Strukturen nachträglich zu ermitteln sind. Da im Verlauf des Prozesses redundante Strukturen anfallen, die es zu eliminieren gilt, muß die Codierung zur Erkennung jedes einzelnen Zweiges geeignet sein und zwar auch dann, wenn zu mehreren Zweigen ganz oder teilweise ein und dasselbe Zweiggewicht gehört.

Bei dem in den folgenden Abschnitten vorgestellten Verfahren zur automatischen Signalflußgraphenanalyse wird von einer Auswertung der Mason-Formel ganz abgesehen. Es bestehen zwar insofern gewisse Beziehungen zu dem eben zitierten Suchverfahren, als ebenfalls nacheinander topologische Strukturen nach wachsender Zweiganzahl bestimmt werden. Die ermittelten Strukturen sind aber nicht die primären topologischen Gebilde, sondern schon unmittelbar diejenigen, die für die endgültige Form der Übertragungsfunktion maßgebend sind.

Das verwendete Verfahren hat im Gegensatz zum Arbeiten mit dem Suchverfahren drei wesentliche Vorteile:

1. Die nachträgliche Bestimmung der Strukturen höherer Ordnung und die dazu notwendige Prüfung auf gemeinsame Knoten entfällt.
2. Die bei der erforderlichen Aufsummierung der Schleifen und Pfad-Schleifen-Terme in der Mason-Formel möglicherweise auftretende Kürzung einzelner Anteile erübrigt sich.
3. Es ist eine Codierung nach Zweiggewichten bzw. Zweiggewichtsanteilen und nicht nur nach Zweigen erlaubt, da eventuell anfallende redundante Strukturen nicht erkannt werden müssen, weil sie paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auftreten und sich von selbst aufheben.

Die in Punkt 2 erwähnte Kürzung kann zum Teil sehr erheblich sein. Zur Erläuterung: Der Signalflußgraph der Kaskadenschaltung nach Bild 4/4 enthält für $l \neq 0$, L in einer Vielzahl von Schleifen quadratische Anteile in den verschiedenen Reflexionsfaktoren r_1 ; die endgültigen Ausdrücke sind aber von Anteilen mit dem Faktor r_1^2 frei.

Der in Punkt 3 angesprochene Codierungsvorteil ist besonders bei den hier betrachteten Leitungsnetzwerken beachtlich, da bei der topologischen Darstellung der Streumatrix einer Stoßstelle nur die freien Parameter und nicht etwa alle Streukoeffizienten mit einem unterschiedlichen Codewort zu belegen sind.

Das verwendete Verfahren ermittelt die Matrix

$$\underline{F}(\lambda) = (\lambda \underline{E} - \underline{G})^{-1}, \quad (8/1.4)$$

die bei der Parameterwahl $\lambda = 1$ in die gesuchte Übertragungsmatrix übergeht. Um einen Vergleich mit der Mason-Formel vorzubereiten, betrachten wir den Einfluß des

Parameters λ auf einen Signalflußgraphen. Aus der Beziehung

$$\underline{V} = \underline{F}(\lambda) \underline{V}' = (\lambda \underline{E} - \underline{G})^{-1} \underline{V}' \quad (8/1.5)$$

folgt

$$\lambda \underline{V} = \underline{G} \underline{V} + \underline{V}' \quad (8/1.6)$$

bzw.

$$\underline{V} = \frac{1}{\lambda} \underline{G} \underline{V} + \frac{1}{\lambda} \underline{V}' \quad , \quad (8/1.7)$$

d.h. jedes Zweiggewicht erscheint mit dem Faktor $1/\lambda$ multipliziert. In den topologischen Strukturen gibt dann der Exponent m des zusätzlichen Faktors $(1/\lambda)^m$ an, daß bei der Bildung der Struktur gerade m Zweige beteiligt sind: jedes Glied der durch die Mason-Formel gegebenen Übertragungsfunktion enthält daher den Faktor $1/\lambda$ so oft, wie zu seiner Aufstellung Zweige zu berücksichtigen sind. Eine Anordnung der einzelnen Glieder nach Potenzen von $1/\lambda$ ist dann gleichzeitig eine Anordnung nach der Anzahl der beteiligten Zweige. So geordnet liefert die Mason-Formel nach der Aufsummierung der in sie eingehenden Terme und nach den dabei möglicherweise erfolgenden Kürzungen einzelner Anteile eine Übertragungsfunktion, die sich als Quotient zweier Polynome in $1/\lambda$ schreiben läßt. Im allgemeinen erhält man

$$\frac{V_i}{V_j} = \frac{b_1(1/\lambda) + b_2(1/\lambda)^2 + \dots + b_m(1/\lambda)^m + \dots + b_N(1/\lambda)^N}{1 + a_1(1/\lambda) + a_2(1/\lambda)^2 + \dots + a_m(1/\lambda)^m + \dots + a_N(1/\lambda)^N} \quad (8/1.8)$$

Die Glieder $a_m(1/\lambda)^m$ und $b_m(1/\lambda)^m$ enthalten, vorzeichenrichtig zusammengefaßt, alle zulässigen m -Schleifen bzw. m -Pfad-Schleifen-Terme. Der Koeffizient b_i verschwindet für $i \neq j$, da der Pfad dann stets über mehr als einen Zweig läuft; er ist eins für $i=j$, da als Pfadanteil nur der Zweig von der externen Quelle zum zugehörigen inneren Knoten vorhanden ist.

Durch formales Erweitern mit λ^N läßt sich die Übertragungsfunktion als Quotient zweier Polynome in λ darstellen:

$$\frac{V_i}{V_j} = \frac{b_1 \lambda^{N-1} + b_2 \lambda^{N-2} + \dots + b_m \lambda^{N-m} + \dots + b_N}{\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_m \lambda^{N-m} + \dots + a_N} \quad (8/1.9)$$

Diese Form der Übertragungsfunktion wird später zum Vergleich mit dem Ergebnis aus dem in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus herangezogen.

8.2 Der Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus

8.2.1 Darstellung und topologische Deutung des Verfahrens

Mit dem Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus (8/4,...,8) ermittelt man aus einer gegebenen N-zeiligen quadratischen Matrix G die Matrix

$$\begin{aligned} \underline{F}(\lambda) &= (\lambda \underline{E} - \underline{G})^{-1} & (8/2.1) \\ &= \frac{\underline{T}(\lambda)}{c(\lambda)} \\ &= \frac{\lambda^{N-1} \underline{T}_0 + \lambda^{N-2} \underline{T}_1 + \dots + \lambda \underline{T}_{N-2} + \underline{T}_{N-1}}{\lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + \dots + c_{N-1} \lambda + c_N} \end{aligned}$$

nach dem wie folgt skizzierten Verfahren (8/8);

$$\begin{array}{ll} c_1 = -\text{Spur}(\underline{T}_0 \underline{G}) & \begin{array}{l} \longleftarrow \underline{T}_0 = \underline{E} \\ \swarrow \end{array} \\ c_2 = -1/2 \text{ Spur}(\underline{T}_1 \underline{G}) & \begin{array}{l} \longleftarrow \underline{T}_1 = \underline{T}_0 \underline{G} + c_1 \underline{E} \\ \swarrow \\ \longleftarrow \underline{T}_2 = \underline{T}_1 \underline{G} + c_2 \underline{E} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ c_{N-1} = -\frac{1}{N-1} \text{ Spur}(\underline{T}_{N-2} \underline{G}) & \begin{array}{l} \longleftarrow \underline{T}_{N-2} = \underline{T}_{N-3} \underline{G} + c_{N-2} \underline{E} \\ \swarrow \end{array} \\ c_N = -\frac{1}{N} \text{ Spur}(\underline{T}_{N-1} \underline{G}) & \begin{array}{l} \longleftarrow \underline{T}_{N-1} = \underline{T}_{N-2} \underline{G} + c_{N-1} \underline{E} \\ \swarrow \\ \underline{T}_N = \underline{T}_{N-1} \underline{G} + c_N \underline{E} = \underline{Q} \end{array} \\ & \text{(Kontrollschritt).} \end{array}$$

Der algorithmische Verlauf des Verfahrens geht auch an Hand von Bild 8/1 hervor. Da das Verfahren vollständig rekursiv

ist und lediglich auf Matrizenmultiplikationen beruht, ist es für eine Programmierung auf dem Digitalrechner besonders geeignet.

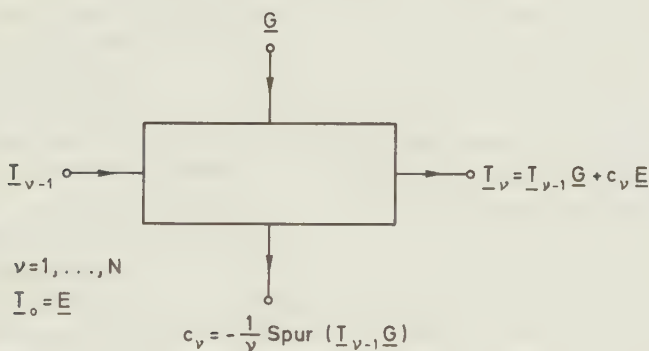


Bild 8/1 Zur Verdeutlichung des Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus

Die Matrix $\underline{F}(\lambda)$ läßt sich nach Gl.(8/1.5) als Übertragungsmatrix auffassen; das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte ist die Übertragungsfunktion

$$\frac{V_i}{V_j} = \frac{d_0 \lambda^{N-1} + d_1 \lambda^{N-2} + \dots + d_{m-1} \lambda^{N-m} + \dots + d_{N-2} \lambda + d_{N-1}}{\lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + c_2 \lambda^{N-2} + \dots + c_m \lambda^{N-m} + \dots + c_{N-1} \lambda + c_N}, \quad (8/2.2)$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise für die Teilelemente der $\underline{T}$ -Matrix die Abkürzung $(T_v)_{ij} = d_v$ gesetzt wurde. Der Vergleich dieser Form der Übertragungsfunktion mit der aus der Mason-Formel gewonnenen Form nach Gl.(8/1.9) ergibt für die Polynomkoeffizienten die Beziehungen

$$a_m = c_m \quad (8/2.3)$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

$$b_m = d_{m-1}, \quad (8/2.4)$$

die die völlige, gliedweise Übereinstimmung der beiden Formen kennzeichnen. Damit ist gezeigt, daß die Umordnung der in der Mason-Formel aufgeführten topologischen Strukturen nach der Anzahl der für sie benötigten Zweige die aus der Mason-Formel gewonnene Übertragungsfunktion genau in diejenige Form überführt, die man algebraisch bei der Anwendung des Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus erhält.

Die topologische Deutung der einzelnen Schritte beim Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus ist jetzt nicht mehr schwierig. Der Algorithmus liefert Schritt für Schritt einen neuen Polynomkoeffizienten in der Reihenfolge $d_0, c_1, d_1, c_2, \dots, d_{m-1}, c_m, \dots, d_{N-1}, c_N$ bzw. $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_m, a_m, \dots, b_N, a_N$. Die Zuordnung der in der Mason-Formel auftauchenden m -Strukturen zu den Koeffizienten b_m und a_m läßt vermuten, daß gerade diese Strukturen während des Ablaufs des Algorithmus ermittelt werden. Wegen der neutralen Eigenschaften des Einselementes für algebraische Produkte muß jedoch bei der topologischen Deutung die Mitwirkung der externen Zweige, die ja das Zweiggewicht Eins haben, ausgeklammert werden, so daß für die Betrachtung nur die inneren Strukturen verbleiben. Diese Einschränkung ist nicht gravierend, da erstens die Schleifen davon nicht betroffen werden, und zweitens die Pfad-Schleifen-Strukturen nachträglich durch Hinzufügen des externen Zweiges wieder zu einer vollständigen Struktur ergänzt werden können.

Die ermittelten inneren Strukturen fallen nacheinander mit wachsender Zweiganzahl an, angefangen mit den durch c_1 charakterisierten einzweiligen Schleifen (d.h. den Eigenschleifen) und den durch d_1 charakterisierten einzweiligen Pfad-Schleifen-Gebilden bis hin zu den durch c_N charakterisierten N -Schleifen: eine durch den Koeffizienten c_ν bzw. d_ν gekennzeichnete innere Struktur besitzt genau soviel Zweige, wie der Index ν angibt. Der Koeffizientenvergleich in den durch die Gleichungen (8/1.9) und (8/2.2) dargestellten Formen der Übertragungsfunktion besagt, daß die ermittelten

Strukturen gerade diejenigen sind, die nach der mit eventuellen Kürzungen erfolgten Aufsummierung der Terme in der Mason-Formel für die endgültige Angabe der Übertragungsfunktion noch erforderlich sind. Der Nachteil der Mason-Formel, daß zunächst Strukturen ermittelt werden müssen, die dann möglicherweise in der endgültigen Form nicht mehr auftauchen, wird somit vermieden. Insbesondere aber werden keine redundanten Strukturen ermittelt, wie etwa bei dem früher zitierten Suchverfahren (an Beispielen zeigt sich, daß möglicherweise entstehende redundante Strukturen paarweise mit verschiedenen Vorzeichen anfallen und sich so von selbst aufheben, d.h. von außen nicht als redundant erkannt werden müssen).

Bemerkenswert für die spätere algebraische Bestimmung der Koeffizienten c_ν gemäß der Vorschrift

$$c_\nu = - \frac{1}{\nu} \text{Spur} (\underline{T}_{\nu-1} \underline{G}) \quad ; \quad \nu = 1, \dots, N$$

ist die Tatsache, daß sich die Spur der Matrix $\underline{T}_{\nu-1} \underline{G}$ ohne Rest durch ν teilen läßt: da in c_ν gerade ein erforderlicher Satz von ν -Schleifen vorhanden ist, muß der Ausdruck $\text{Spur}(\underline{T}_{\nu-1} \underline{G})$ diesen Satz von ν -Schleifen ν -mal enthalten.

8.2.2 Behandlung eines Beispiels

Zur Verdeutlichung des Verfahrens soll als Beispiel der in Bild 8/2 gezeigte Signalflußgraph vollständig analysiert werden. Da das gleiche Beispiel von Till in (8/2) zur Erläuterung des von Hohn, Seshu und Aufenkamp (8/1) vorgeschlagenen Suchverfahrens für die primären topologischen Strukturen behandelt wurde, ist so auch ein anschaulicher, hier aber nicht vorgenommener Vergleich der beiden Verfahren möglich.

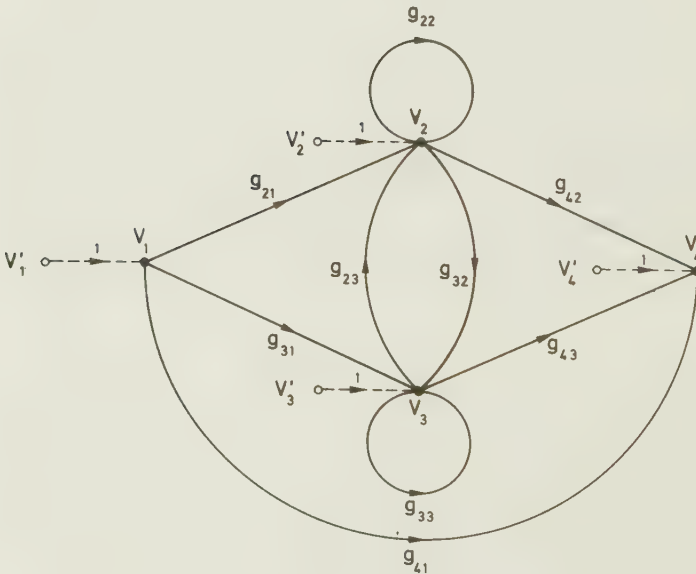


Bild 8/2: Beispiel eines Signalflußgraphen

Die Verknüpfungsmatrix $\underline{G}$ lautet in der hier verwendeten Definition

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8/2.5a)$$

wobei der Zusammenhang mit der in Bild 3/1 gezeigten Struktur eines allgemeinen Signalflußgraphen über die Beziehungen $N=4$, $G_{11}=0, \dots$, $G_{43}=g_{43}$, $G_{44}=0$ gegeben ist.

Der erste Schritt liefert mit $\underline{T}_0 \underline{G} = \underline{E} \underline{G} = \underline{G}$ den Koeffizienten

$$c_1 = -\text{Spur}(\underline{T}_0 \underline{G}) = -(g_{22} + g_{33}) \quad (8/2.5b)$$

und die Matrix $\underline{T}_1 = \underline{T}_0 \underline{G} + c_1 \underline{E}$, d.h.

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} -(g_{22}+g_{33}) & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & -g_{33} & g_{23} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & -g_{22} & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & -(g_{22}+g_{33}) \end{bmatrix}. \quad (8/2.5c)$$

Der Koeffizient c_1 enthält die Eigenschleifen des Graphen, die Matrix $\underline{T}_1$ die inneren einzweigen Pfad-Schleifen-Gebilde. Die anfallenden Strukturen sind vorzeichenbehaftet und zwar derart, wie es ihre Stellung in der Mason-Formel erfordert.

Der zweite Schritt ergibt zunächst

$$\underline{T}_1 \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{33}g_{21} & -g_{33}g_{22} & -\cancel{g_{23}g_{33}} & 0 \\ g_{23}g_{31} & g_{23}g_{32} & \cancel{g_{23}g_{33}} & 0 \\ g_{32}g_{21} & \cancel{g_{32}g_{22}} & g_{32}g_{23} & 0 \\ -g_{22}g_{31} & \cancel{-g_{32}g_{22}} & -g_{33}g_{22} & 0 \\ g_{42}g_{21} & \cancel{g_{42}g_{22}} & g_{42}g_{23} & 0 \\ g_{43}g_{31} & g_{43}g_{32} & \cancel{g_{43}g_{33}} & 0 \\ -g_{22}g_{41} & \cancel{-g_{42}g_{22}} & -g_{43}g_{22} & 0 \\ -g_{33}g_{41} & -g_{33}g_{42} & \cancel{-g_{43}g_{33}} & 0 \end{bmatrix} \quad (8/2.5d)$$

In der Matrix $\underline{T}_1 \underline{G}$ tauchen redundante Strukturen auf, die aber paarweise entgegengesetzte Vorzeichen haben und sich so selbst herausheben. Zur Erläuterung: die Struktur $g_{23}g_{33}$ ist ein unechter Pfad-Schleifen-Term, da der Zweig g_{23} vom Knoten V_3 zum Knoten V_2 die Eigenschleife g_{33} am Knoten V_3 berührt. Zwangsläufig muß diese Struktur noch mit negativem Vorzeichen anfallen, da die endgültige Matrix $\underline{T}_2$, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen mit den Elementen von $\underline{T}_1 \underline{G}$ übereinstimmen, nur echte Strukturen enthalten kann.

Aus der Spur der Matrix $\underline{T}_1 \underline{G}$ ergeben sich alle zulässigen 2-Schleifen für den Nenner der Übertragungsfunktion, nämlich

$$c_2 = -1/2 \text{ Spur}(\underline{T}_1 \underline{G}) = g_{33}g_{22} - g_{23}g_{32}. \quad (8/2.5e)$$

Die ermittelten 2-Schleifen sind eine Schleife 2-ter Ordnung, nämlich die aus den Eigenschleifen g_{22} und g_{33} gebildete Schleife $g_{33}g_{22}$, und die Schleife 1-ter Ordnung $g_{23}g_{32}$, die vom Knoten V_2 über g_{32} zum Knoten V_3 und zurück über g_{23} zum Knoten V_2 läuft. Die Schleife gerader Ordnung geht mit positivem, die Schleife ungerader Ordnung mit negativem Vorzeichen in die Übertragungsfunktion ein.

Die erforderlichen Pfad-Schleifen-Strukturen aus zwei inneren Zweigen werden von der Matrix $\underline{T}_2 = \underline{T}_1 \underline{G} + c_2 \underline{E}$ geliefert.

Die Matrix lautet

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33}\varepsilon_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{23}\varepsilon_{32} & & & \\ -\varepsilon_{33}\varepsilon_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{23}\varepsilon_{31} & & & \\ \varepsilon_{32}\varepsilon_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{22}\varepsilon_{31} & & & \\ \varepsilon_{42}\varepsilon_{21} & \varepsilon_{43}\varepsilon_{32} & \varepsilon_{42}\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{43}\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{33}\varepsilon_{42} & -\varepsilon_{43}\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23}\varepsilon_{32} \\ -\varepsilon_{22}\varepsilon_{41} & & & \\ -\varepsilon_{33}\varepsilon_{41} & & & \end{bmatrix} \quad (8/2.5f)$$

Der dritte Schritt beginnt mit der Bildung von $\underline{T}_2 \underline{G}$:

$$\underline{T}_2 \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{43}\varepsilon_{32}\varepsilon_{21} & \cancel{\varepsilon_{43}\varepsilon_{32}\varepsilon_{22}} & \cancel{\varepsilon_{43}\varepsilon_{32}\varepsilon_{23}} & \\ -\varepsilon_{42}\varepsilon_{21}\varepsilon_{33} & \cancel{-\varepsilon_{42}\varepsilon_{33}\varepsilon_{22}} & \cancel{-\varepsilon_{42}\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}} & \\ \varepsilon_{42}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} & \cancel{\varepsilon_{42}\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}} & \cancel{-\varepsilon_{42}\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}} & \\ -\varepsilon_{43}\varepsilon_{31}\varepsilon_{22} & \cancel{-\varepsilon_{43}\varepsilon_{32}\varepsilon_{22}} & \cancel{-\varepsilon_{43}\varepsilon_{33}\varepsilon_{22}} & 0 \\ \varepsilon_{41}\varepsilon_{33}\varepsilon_{22} & \cancel{-\varepsilon_{42}\varepsilon_{33}\varepsilon_{22}} & \cancel{\varepsilon_{43}\varepsilon_{33}\varepsilon_{22}} & \\ -\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}\varepsilon_{41} & \cancel{-\varepsilon_{42}\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}} & \cancel{-\varepsilon_{43}\varepsilon_{32}\varepsilon_{23}} & \end{bmatrix}, \quad (8/2.5g)$$

Die Spurbildung liefert

$$c_3 = -\frac{1}{3} \text{ Spur}(\underline{T}_2 \underline{G}) = 0, \quad (8/2.5h)$$

d.h. der Signalflußgraph besitzt keine 3-Schleifen.

Wegen $c_3 = 0$ ist

$$\underline{T}_3 = \underline{T}_2 \underline{G} + c_3 \underline{E} = \underline{T}_2 \underline{G}. \quad (8/2.5i)$$

Drei-zweigige innere Pfad-Schleifen-Terme sind nur bei der Übertragung vom Knoten V_1 zum Knoten V_4 vorhanden.

Der vierte Schritt liefert bereits bei der Bildung von $\underline{T}_3 \underline{G}$ die Nullmatrix

$$\underline{T}_3 \underline{G} = \underline{0}, \quad (8/2.5j)$$

d.h.

$$c_4 = 0 \quad (8/2.5k)$$

und

$$\underline{T}_4 = \underline{T}_3 \underline{G} + c_4 \underline{E} = \underline{0}. \quad (8/2.5l)$$

Der Algorithmus bricht mit $\underline{T}_3 \underline{G} = \underline{0}$ ab, d.h. der Signalflußgraph besitzt keine vierzweigigen Schleifen. Die Matrix $\underline{T}_N$ ist bei einem N-knotigen Signalflußgraph identisch mit der Nullmatrix, da es keine Pfad-Schleifen-Terme aus N inneren Zweigen geben kann.

Zur Bildung der Übertragungsmatrix werden die ermittelten $\underline{T}_\nu$ -Teilmatrizen und die Koeffizienten c_ν in (8/2.1) eingesetzt und der Parameter $\lambda = 1$ gesetzt. Man erhält bei dem behandelten Beispiel

$$\underline{T} = \frac{\underline{T}_0 + \underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3}{1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4}. \quad (8/2.5m)$$

Von der Übertragungsmatrix $\underline{F}$ soll vereinfachend nur ein Element explizit angegeben werden. Wir wählen $(F)_{42}$, d.h. die Übertragungsfunktion von der Quelle V_2^1 zum Knoten V_4 :

$$\frac{V_4}{V_2^1} = \frac{g_{42} + g_{43}g_{32} - g_{42}g_{33}}{1 - g_{22} - g_{33} + g_{33}g_{22} - g_{23}g_{32}} \quad . \quad (8/2.5n)$$

8.3 Codierung und Programmierung

8.3.1 Vorbemerkung

Das Ziel der Signalflußgraphenanalyse ist die Gewinnung von Übertragungsfunktionen. Wenn in dem Aufbau der Übertragungsfunktion der Einfluß der verschiedenen Parameter des Signalflußgraphen wiedererkannt werden soll, muß die Übertragungsfunktion in algebraischer Form vorliegen. Die nachfolgenden Ausführungen beschäftigen sich nun mit der Aufgabe, wie der Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus auf einem Digitalrechner in algebraischer Form verarbeitet werden kann.

Auf die numerische Durchrechnung des Algorithmus wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Es erscheint auch fraglich, ob dazu der genannte Algorithmus geeignet ist. Wie z.B. Gl.(8/2.5d) und Gl.(8/2.5g) für das algebraisch durchgerechnete Beispiel zeigen, fallen nämlich während des Ablaufs in starkem Maße Differenzbildungen gleich großer Zahlen an, die bei der üblichen Gleitkommadarstellung der Zahlen bekanntlich zu erheblichen Fehlern führen können.

8.3.2 Codierung

Für die automatische Verarbeitung algebraischer Ausdrücke auf einem Digitalrechner ist eine geeignete Codierung notwendig. Bei der Programmierung in einer problemorientierten Sprache wie Algol oder Fortran ist die Primzahlcodierung eine zweckmäßige Methode; Anwendungen bei der Lösung von netzwerktheoretischen Aufgaben finden sich beispielsweise in (8/3,9,10).

Die Primzahlcodierung beruht auf der eindeutigen Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren. Werden den verschiedenen Faktoren eines algebraischen Produktes Primzahlen zugeordnet, so kann es durch nur eine Zahl, nämlich durch das Produkt der Primzahlen, umkehrbar eindeutig dargestellt werden. Da es im Gegensatz zur Produktdarstellung einer natürlichen Zahl durch Primzahlen keine umkehrbar eindeutige Summendarstellung gibt, darf bei der Bildung des aus Zahlen bestehenden pseudonumerischen Wertes für den algebraischen Ausdruck die Addition bzw. Subtraktion nicht durchgeführt werden, es sei denn, daß zwei betragsgleiche Glieder unterschiedliches Vorzeichen besitzen und sich so aufheben. Im allgemeinen jedoch führt die Codierung eines algebraischen Ausdrucks zu einer Folge vorzeichenbehafteter Zahlen, deren Glieder den einzelnen algebraischen Summanden zugeordnet sind.

Zur Verdeutlichung der Primzahlcodierung und der dadurch ermöglichten pseudonumerischen Durchführung des Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus betrachten wir das im vorhergehenden Abschnitt behandelte Beispiel, dessen einzelne Rechenschritte jetzt in codierter Form erfolgen.

Die durch Gl.(8/2.5a) gegebene Verknüpfungsmatrix $\underline{G}$ geht durch die Codierung $g_{21} \leftrightarrow 2, g_{22} \leftrightarrow 3, g_{23} \leftrightarrow 5, \dots, g_{43} \leftrightarrow 23$ über in die Form

$$\underline{G} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 11 & 13 & 0 \\ 17 & 19 & 23 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8/3.1a)$$

die wegen $\underline{T}_0 = \underline{E}$ gleich dem Matrizenprodukt $(\underline{T}_0 \underline{G})$ ist.

Die negative Spur dieser Matrix liefert den Koeffizienten c_1 in codierter Form zu

$$c_1 = - \text{Spur}(\underline{T}_0 \underline{G}) \leftrightarrow (-3, -13) . \quad (8/3.1b)$$

Der Rechenschritt $\underline{T}_1 = \underline{T}_0 \underline{G} + c_1 \underline{E}$ ergibt die codierte Matrix

$$\underline{T}_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} (-3, -13) & 0 & 0 & 0 \\ 2 & (\cancel{3}, \cancel{3}, -13) & 5 & 0 \\ 7 & 11 & (\cancel{13}, -3, \cancel{13}) & 0 \\ 17 & 19 & 23 & (-3, -13) \end{bmatrix} \quad (8/3.1c)$$

In den einzelnen Zahlenfolgen, die die Elemente der Matrix $\underline{T}_1$ darstellen, tauchen bereits entgegengesetzt gleiche Glieder auf. Da die Glieder ganze Zahlen sind, d.h. Festkomma- statt Gleitkomma-Darstellung vorliegt, ist die Differenzbildung prinzipiell ohne Fehler durchführbar, so daß sich die Glieder vollständig aufheben.

Das Produkt aus den codierten Matrizen $\underline{T}_1$ und $\underline{G}$ lautet

$$\underline{T}_1 \underline{G} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-26, 35) & (-39, 55) & (\cancel{-65}, \cancel{65}) & 0 \\ (22, -21) & (\cancel{33}, \cancel{33}) & (55, -39) & 0 \\ (38, 161, -51, -221) & (\cancel{57}, 253, \cancel{-57}, -247) & (195, \cancel{299}, -69, \cancel{-299}) & 0 \end{bmatrix} \quad (8/3.1d)$$

Zur Veranschaulichung der Kürzungsregel sind wiederum in den einzelnen Zahlenfolgen alle zunächst erhaltenen Codeworte aufgeführt, von denen dann die entgegengesetzt gleichen zu streichen sind.

Für die Bestimmung des Koeffizienten c_2 ist zunächst die Spur der Matrix $\underline{T}_1 \underline{G}$ zu bilden; sie lautet in codierter Form

$$\text{Spur}(\underline{T}_1 \underline{G}) \leftrightarrow (-39, 55, 55, -39),$$

woraus sich durch Entfernen aller nochmals vorkommenden gleichen Glieder und anschließender Vorzeichenumkehr der codierte Koeffizient c_2 ergibt zu

$$c_2 = -\frac{1}{2} \text{Spur}(\underline{T}_1 \underline{G}) \leftrightarrow (39, -55). \quad (8/3.1e)$$

Entsprechend wird bei der Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten

$$c_v = -\frac{1}{v} \text{Spur}(\underline{T}_{v-1}\underline{G}) ; \quad v = 1, \dots, N$$

verfahren: da der Ausdruck $\text{Spur}(\underline{T}_{v-1}\underline{G})$ gleiche Glieder v -fach enthält, erfolgt die Division der codierten Form durch die Zahl v durch Streichen von $(v-1)$ Gliedern aus der jeweiligen Gruppe der v gleichen Glieder; im Anschluß daran erfolgt dann die Vorzeichenumkehr.

Die Rechenvorschrift $\underline{T}_2 = \underline{T}_1\underline{G} + c_2\underline{E}$ führt auf die codierte Matrix

$$\underline{T}_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} (39, -55) & 0 & 0 & 0 \\ (-26, 35) & 0 & 0 & 0 \\ (22, -21) & 0 & 0 & 0 \\ (38, 161, -51, -221) & (253, -247) & (95, -69) & (39, -55) \end{bmatrix}, \quad (8/3.1f)$$

in der wie in dem folgenden Produkt $\underline{T}_2\underline{G}$ bereits die Kürzung durchgeführt wurde. Das Produkt lautet codiert

$$\underline{T}_2\underline{G} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (506, -494, 665, -483, 663, -935) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8/3.1g)$$

Wegen $c_3 = -\frac{1}{3} \text{Spur}(\underline{T}_2\underline{G}) \leftrightarrow 0$ ist $\underline{T}_3 = \underline{T}_2\underline{G}$; das Produkt $\underline{T}_3\underline{G}$ ist die Nullmatrix (d.h. $c_4 \leftrightarrow 0$) und der Algorithmus bricht ab.

Entsprechend Gl.(8/2.5m) läßt sich die Übertragungsmatrix $\underline{F}$ in codierter Form angeben. Zur Erläuterung der Decodierung soll die durch Gl.(8/2.5n) angegebene Übertragungsfunktion $(\underline{F})_{42} = V_4/V_2'$ ermittelt werden.

Die codierte Übertragungsfunktion lautet

$$\frac{V_4}{V_2'} \leftrightarrow \frac{(19, 253, -247)}{(1, -3, -13, 39, -55)} \quad (8/3.2a)$$

Das Zerlegen der einzelnen Glieder in Primfaktoren führt auf

$$\frac{V_4}{V_2'} \leftrightarrow \frac{(19, 11 \cdot 23, -13 \cdot 19)}{(1, -3, -13, 3 \cdot 13, -5 \cdot 11)} \quad (8/3.2b)$$

woraus sich durch Ersetzen der Primfaktoren durch die zugeordneten algebraischen Symbole und durch Umwandlung der Folgen in algebraische Summen schließlich die gesuchte, bereits durch Gl.(8/2.5n) in algebraischer Form angegebene Übertragungsfunktion ergibt:

$$\frac{V_4}{V_2'} = \frac{\varepsilon_{42} + \varepsilon_{32}\varepsilon_{43} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{42}}{1 - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32}}$$

Da hier durch die Codierung lediglich ein algebraisches Rechnen in numerischer Form ermöglicht werden soll, können gleiche algebraische Größen auch mit gleichen Codeworten belegt werden. Haben beispielsweise mehrere Zweige das gleiche Zweiggewicht, so kann für die Codierung dasselbe Codewort verwendet werden. Diese Möglichkeit ist bei dem weiter oben zitierten Suchverfahren nicht gegeben, da es dort primär darauf ankommt, nicht die aus Zweiggewichten bestehenden algebraischen Ausdrücke, sondern die aus Zweigen bestehenden topologischen Strukturen zu ermitteln.

8.3.3 Programmierung

Zur automatischen Durchführung des Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus wurde ein Algol-Programm erstellt, mit dessen Hilfe die Analyse von Signalflußgraphen zur Gewinnung von Übertragungsfunktionen in algebraisch-symbolischer Form möglich ist.

Der maximale Umfang der zu untersuchenden Signalflußgraphen hängt von zwei wesentlichen Eigenschaften des verwendeten Rechners ab, nämlich von seinem Festkomma-Zahlenbereich und von dem zugänglichen Speicherplatz.

Der Zahlenbereich bestimmt die Größe der zulässigen Primfaktorprodukte. Muß im ungünstigsten Fall jeder Zweig des Signalflußgraphen mit einer unterschiedlichen Primzahl codiert werden und sind in einer anfallenden Struktur sämtliche Zweige enthalten, so ergibt das Produkt der Zweiggewichte die Zahl

$$P = \prod_{i=1}^c p_i \quad , \quad (8/3.3)$$

wobei die Faktoren p_i die c ersten Primzahlen 2,3,5,7... sind. Die Zahl P darf den Zahlenbereich nicht überschreiten.

Bei der verwendeten Rechenanlage CDC3300 ist die größte darstellbare ganze Zahl die Zahl $2^{47}-1 \approx 1,4 \cdot 10^{14}$. Für Gl.(8/3.3) folgt dann: $c=14$, $p_c=43$, $P \approx 1,3 \cdot 10^{14}$. Das bedeutet, daß der zu analysierende Signalflußgraph im ungünstigsten Fall nur $c=14$ Zweige enthalten darf. In der Regel liegt die zulässige Zweiganzahl aber wesentlich höher, da meist mindestens eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist: der Signalflußgraph enthält Zweige mit gleichen Zweiggewichten; es gibt Zweige mit dem Gewicht Eins; nur ein Teil der Zweige geht jeweils in die anfallenden Strukturen ein.

Im Gegensatz zum Zahlenbereich, der die Größe der anfallenden Primzahlprodukte beschränkt, begrenzt der zugängliche Speicherplatz die Anzahl der Produkte. Wie die Ausführungen in Abschnitt 8.2 erkennen lassen, ist der Platzbedarf im v -ten Schritt des Algorithmus im wesentlichen durch den Umfang der Matrizen $\underline{T}_{v-1}$ und $\underline{T}_v$ bestimmt, deren Elemente ja aus Zahlenfolgen bestehen. Eine Abschätzung der Gliederanzahl dieser Matrizen ist aber schwierig, da außer der Art der Besetzung der Verknüpfungsmatrix $\underline{G}$ noch die Tatsache entscheidend ist, ob einzelne Elemente gleichen oder entgegengesetzt gleichen Wert haben, was zu Kürzungen innerhalb der Zahlenfolgen führen kann.

Der ungünstigste Fall liegt dann vor, wenn die Matrix $\underline{G}$ vollständig und mit verschiedenen Elementen besetzt ist. Die experimentell gefundene Abhängigkeit zwischen dem Grad N der Matrix $\underline{G}$, d.h. der Knotenanzahl, und der maximalen Gliederanzahl m_N innerhalb der Teilmatrizen $\underline{T}_v$ lautet für diesen Fall, der bis zu dem maximal erreichbaren Grad $N=6$ untersucht wurde

$$m_N = N \cdot N! \qquad (8/3.4)$$

Der benötigte Platzbedarf steigt also sehr stark mit dem Grad an. Wird bei der verwendeten Rechenanlage CDC3300 nur der Kernspeicher benutzt, so können ca. 12 Tausend Zahlen abgespeichert werden. Für die untersuchten Testbeispiele, denen Signalflußgraphen aus technischen Fragestellungen zu Grunde lagen, erwies sich stets der zugängliche Speicherplatz und nicht der Zahlenbereich als Grenze für den Umfang der analysierbaren Signalflußgraphen.

Die Darstellung des Signalflußgraphen im Rechner geschieht durch die Angabe des End- und Anfangsknotens der einzelnen Zweigbündel, der Bündelstärke sowie der codierten Zweiggewichte der zugehörigen Teilzweige. Die Bündelstärke gibt dabei gleichzeitig die Anzahl der Codeworte in der Zahlenfolge an, aus der das jeweilige Matrixelement der Verknüpfungs-

matrix G gebildet wird. Für das im Abschnitt 8.2.2 eingeführte und in Abschnitt 8.3.2 codiert gerechnete Beispiel hat das Maschinenprotokoll für die Beschreibung der Signalflußgraphenstruktur die folgende Form:

NACH KNOTEN	VON KNOTEN	BUENDEL STÄRKE	WERTE DER CODIERTEN TEILZWEIGE
2	1	1	2
2	2	1	3
2	3	1	5
3	1	1	7
3	2	1	11
3	3	1	13
4	1	1	17
4	2	1	19
4	3	1	23

Bei der Ausgabe der Koeffizienten der gesuchten Übertragungsfunktionen erscheinen die einzelnen Summanden in Primfaktoren zerlegt, so daß die Decodierung in algebraische Produkte unmittelbar erfolgen kann. Zur Erläuterung werden für die Bestimmung der Übertragungsfunktion V_4/V_2' des begleitenden Beispiels die entsprechenden Protokollausschnitte aufgeführt:

GESUCHT UE= 1 UEBERTRAGUNGSFUNKTIONEN
KENNZEICHNENDE ELEMENTE

4, 2

DIE KOEFFIZIENTEN DER NENNERDETERMINANTE IM ZYKLUS 1 LAUTEN

-3=-1 * 3
-13=-1 * 13

DIE ZÄHLERKOEFFIZIENTEN IM ZYKLUS 1 LAUTEN

KOEFFIZIENTEN ZUM ELEMENT 4, 2
19= 1 * 19

ENDE VON ZYKLUS 1

DIE KOEFFIZIENTEN DER NENNERDETERMINANTE IM ZYKLUS 2 LAUTEN

$$\begin{array}{rcl} -55 & = & -1 * 5 * i_1 \\ 39 & = & 1 * 3 * i_3 \end{array}$$

DIE ZAEHLERKOEFFIZIENTEN IM ZYKLUS 2 LAUTEN

$$\begin{array}{rcl} \text{KOEFFIZIENTEN ZUM ELEMENT } 4, 2 \\ 253 & = & 1 * 11 * i_3 \\ -247 & = & -1 * 13 * i_9 \end{array}$$

ENDE VON ZYKLUS 2

DIE KOEFFIZIENTEN DER NENNERDETERMINANTE IM ZYKLUS 3 SIND NULL

DIE ZAEHLERKOEFFIZIENTEN IM ZYKLUS 3 LAUTEN

$$\text{KOEFFIZIENTEN ZUM ELEMENT } 4, 2 \text{ SIND NULL}$$

ENDE VON ZYKLUS 3

DIE KOEFFIZIENTEN DER NENNERDETERMINANTE IM ZYKLUS 4 SIND NULL

ENDE VON ZYKLUS 4 ANALYSE REGULARER BEFINDET

Aus Gründen der Speicherökonomie werden die Verknüpfungsmatrix G, sowie die daraus später hergeleiteten Teilmatrizen T, nicht durch dreifach indizierte Felder dargestellt, sondern jeweils durch ein einfach indiziertes Feld, das die einzelnen, von Null verschiedenen Codeworte in fortlaufender Reihenfolge enthält, und ein zweifach indiziertes Feld, über das eine Zuordnung von Folgen einzelner Codeworte zu den jeweiligen Matrixelementen bewirkt wird. Durch diese Art der Abspeicherung wird verhindert, daß kostbarer Speicherplatz durch unausgenutztes Reservieren bzw. durch unnötiges Einschreiben von Nullen verlorengeht.

8.4 Anwendung auf Leitungsnetzwerke zur Bestimmung der Übertragungsfunktion

Bei der Anwendung des vorgestellten Analyseverfahrens auf Leitungsnetzwerke beschreibende Signalflußgraphen ergeben sich einige Besonderheiten, die im folgenden diskutiert werden. Zur Erläuterung der verschiedenen Möglichkeiten bei der Aufbereitung des Signalflußgraphen für die automatische Analyse dienen eine Reihe einfacher Beispiele, die sich auf die in Bild 8/3a gezeigte Schaltung beziehen. Es handelt sich dabei um eine zwischen einer innenwiderstandsbehafteten Quelle und einem Abschlußwiderstand betriebene Kaskade von drei Elementarleitungen, von denen die beiden äußeren den gleichen Wellenwiderstand besitzen und somit ein homogenes Leitungsstück bilden; von Interesse ist die Übertragungsfunktion $U_2/2U_0$.

Wie in Kapitel 3.1 dargelegt wurde, läßt sich der Gesamtsignalflußgraph eines Leitungsnetzwerkes aus der Verbindung der Teilsignalflußgraphen aufbauen, die sich aus der unmittelbaren topologischen Darstellung der Streumatrizen der Stoßstellen und Elementarleitungen ergeben. Der so erhaltene Signalflußgraph kann in unveränderter Form der Analyse unterworfen werden. Für das zu untersuchende Beispiel zeigen die Bilder 8/3b und 8/3c den derart erhaltenen Signalflußgraphen in uncodierter und in codierter Form; die Zuordnung zwischen den algebraischen Symbolen und den Codeworten ist: $z^{-1} \leftrightarrow 2$, $r_0 \leftrightarrow 3$, $r_1 \leftrightarrow 5$, $r_2 \leftrightarrow 7$.

Die Verallgemeinerung der auf diese Weise aufgebauten Signalflußgraphen ist das in Bild 3/4 gezeigte Vektorflußdiagramm, aus dem sich nach Einführung der Zustandsvariablen das in Bild 3/7 gezeigte Vektorflußdiagramm für die Zustandsgleichungen des Leitungsnetzwerkes herleiten läßt. Kennzeichnend für die durch solche Vektorflußdiagramme symbolisierten Signalflußgraphen ist das explizite Erscheinen aller durch die betreffenden Vektoren und Matrizen symbolisierten Knoten und Zweiggewichte.

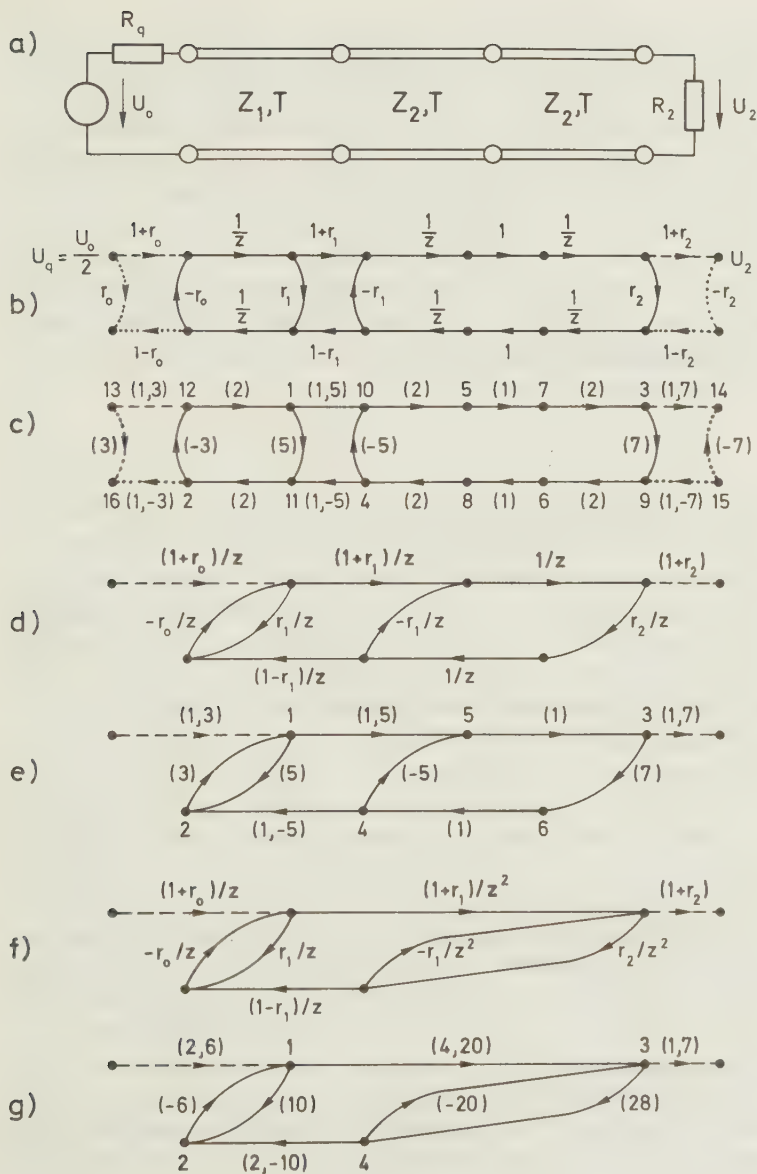


Bild 8/3: Beispiele der Aufbereitung eines Signalflußgraphen für die automatische Analyse

Für die Bestimmung einzelner Übertragungsfunktionen ist es aber nicht notwendig, den gesamten Signalflußgraphen der automatischen Analyse zu unterwerfen. Zweckmäßigerweise werden diejenigen Zweige nicht berücksichtigt, die offenbar für die interessierende Übertragungsfunktion keinen Beitrag leisten, z.B. die punktiert gezeichneten Zweige in Bild 8/3b bzw. 8/3c. Es ist weiterhin unzweckmäßig, in die automatische Analyse diejenigen Zweige mit einzubeziehen, die lediglich an Pfaden, nicht aber an Schleifen beteiligt sind. Wie die Betrachtung des zu den Zustandsgleichungen gehörenden Vektorflußdiagramms in Bild 3/7, sowie der kennzeichnenden Übertragungsmatrix nach Gl.(3/2.7), nämlich

$$\underline{H}_*(z) = \underline{C} (z\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$$

zeigt, gehen die zu diesen Zweigen gehörenden Gewichte nur multiplikativ (C und B) bzw. additiv (D) in die gesuchten Übertragungsfunktionen ein. Da der Einfluß derartiger Zweige von vornherein bekannt ist, braucht die automatische Analyse nur auf einen Teil des Graphen angewandt zu werden. Bei dem behandelten Beispiel entfallen demnach für die automatische Analyse die gestrichelt gezeichneten Zweige, so daß nur der voll ausgezogene Teil des Graphen in Bild 8/3b bzw. 8/3c berücksichtigt zu werden braucht.

Die Symbolisierung des so eingeschränkten Signalflußgraphen durch ein Vektorflußdiagramm zeigt Bild 8/4a. Es unterscheidet sich außer durch die Annahme verschwindender Anfangswerte von dem entsprechenden schleifenhaltigen Teil des ursprünglichen Diagramms (Bild 3/7) durch die zusätzliche Angabe des externen Quellknotens $\underline{\tilde{X}}'_*$, wobei diese Angabe lediglich zur klaren Verdeutlichung zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen dienen soll. Ein bedeutsames äquivalentes Diagramm zeigt Bild 8/4b, das aus dem in Bild 8/4a gezeigten durch Eliminierung des Knotens $\underline{\tilde{X}}_*$ entstanden ist. Die nun noch dargestellten Vektoren $\underline{X}'_*$ und $\underline{X}_*$ sind durch die

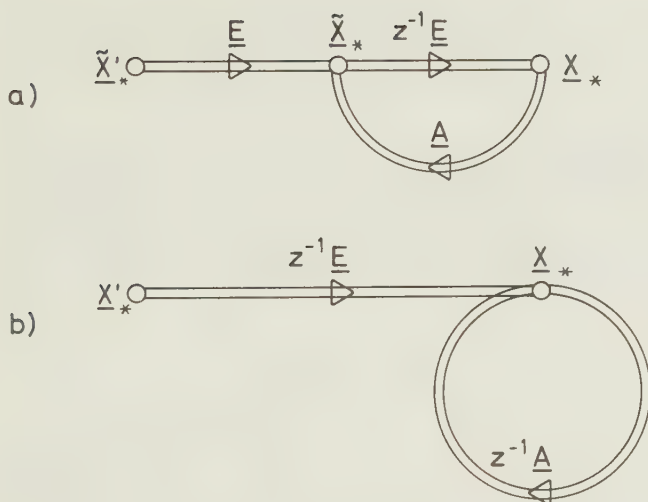


Bild 8/4: Eliminierung des Knotens $\tilde{X}$

gesuchte Beziehung

$$\underline{X}_* = (z \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{X}'_* \quad (8/4.1)$$

miteinander verknüpft. Die interessierende Matrix

$$\underline{F}(z) = (z \underline{E} - \underline{A})^{-1} \quad (8/4.2)$$

ist aber nach Gl.(8/2.1) das unmittelbare Ziel des zur Analyse verwendeten Souriau-Frame-Faddejew-Algorithmus; für die Matrizen gilt

$$\underline{G} = \underline{A} \quad , \quad (8/4.3)$$

der Parameter λ hat die Bedeutung

$$\lambda = z \quad . \quad (8/4.4)$$

Daraus folgt für die Codierung, daß der nun in allen Zweiggewichten auftauchende Faktor $1/z$ nicht codiert zu werden braucht, da sein Einfluß und seine Stellung in den zu gewinnenden Übertragungsfunktionen nach Gl.(8/2.1) bekannt ist.

Für das behandelte Beispiel ist in Bild 8/3d der durch die Knotenelimination entstandene Signalflußgraph dargestellt, wobei nur der stark ausgezogene Teil der automatischen Analyse zu unterwerfen ist. Die Codierung ist in Bild 8/3e angegeben; der Zweiggewichtsanteil $1/z$ wirkt formal wie mit dem Codewort Eins codiert.

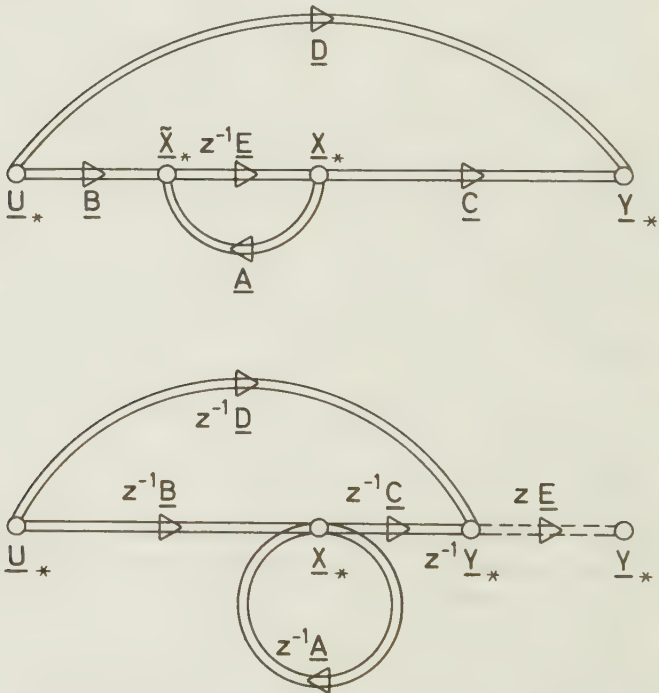


Bild 8/5: Ursprüngliches und modifiziertes Vektorflußdiagramm der Zustandsgleichungen

Falls die gesamte Übertragungsfunktion automatisch bestimmt werden soll, kann das erforderliche Auftreten des Faktors $1/z$ in jedem Zweiggewicht formal stets erfüllt werden, wie das in Bild 8/5 gezeigte modifizierte Vektorflußdiagramm für die Zustandsgleichungen erkennen läßt. Statt der gesuchten Übertragungsmatrix $\underline{H}_*(z)$ wird jedoch $1/z \underline{H}_*(z)$ ermittelt. Bei dem behandelten Beispiel können in den Bildern 8/3d und 8/3e die gestrichelt gezeichneten Zweige in die Analyse mit einbezogen werden; die erhaltenen Übertragungsfunktionen zu den Senken sind dann nachträglich mit dem Faktor z zu multiplizieren.

Bei einem gegebenen Signalflußgraphen interessieren häufig nur Übertragungsfunktionen zwischen einer geringen Anzahl von Knoten. In Hinblick auf die automatische Analyse ist es dann allgemein zweckmäßig, den Signalflußgraphen durch Elimination überflüssiger Knoten von vornherein weitgehend zu reduzieren. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, bei der Eingabe der Daten in den Rechner nicht unnötig großen Aufwand treiben zu müssen. Damit sich dieser Vorteil lohnt, dürfen die Reduktionsschritte nicht schwierig sein. Komplizierte Reduktionsschritte sind aber dann notwendig, wenn der ursprüngliche Signalflußgraph so umfangreich ist, daß er vom Rechner wegen Mangel an Speicherplatz nicht mehr verarbeitet werden kann.

Bei dem hier behandelten Beispiel wurde angenommen, daß nur die Übertragungsfunktion $U_2/2U_0$ interessiert. Offenbar lassen sich die bisher angegebenen Signalflußgraphen in der Knotenanzahl noch weiter reduzieren, ohne daß dazu aufwendige Operationen notwendig sind. In dem ursprünglichen, in Bild 8/3b gezeigten Signalflußgraphen, können z.B. ohne weiteres die Kaskadenknoten 5, 6, 7 und 8 entfernt werden. Dem entspricht die sofortige Darstellung der Streumatrix des homogenen Leitungsstückes doppelter Elementarleitungslänge durch nur einen Signalflußgraphen, dessen Zweige jeweils die Gewichte $1/z^2$ besitzen. Werden für die weitere Reduktion die Ausgangsknoten der die homogenen Leitungen

beschreibenden Signalflußgraphen als Bezugsknoten beibehalten und die Eingangsknoten eliminiert, so ergibt sich der in Bild 8/3f gezeigte Signalflußgraph, dessen interessierender Teil nur noch vier Knoten umfaßt. Die Codierung zeigt Bild 8/3g; der Faktor $1/z$ muß wieder mit einem Codewort belegt werden. Diese Art der Reduzierung ist dann vorteilhaft, wenn das Leitungsnetzwerk besonders viele homogene Leitungsstücke mehrfacher Elementarleitungslänge enthält und die Übertragung zu Punkten innerhalb der Leitungen nicht interessiert. Die maßgebende Anzahl an Knoten wird nun durch die Anzahl an homogenen Leitungsstücken, nicht aber durch die Anzahl an Elementarleitungen bestimmt.

Das vorgestellte Verfahren zur automatischen Analyse von Signalflußgraphen ist in dieser Arbeit speziell für die Gewinnung der durch Gl.(4/3.16) und Gl.(4/3.22) angegebenen Übertragungsfunktion einer Leitungskaskade verwendet worden. Die Untersuchung erstreckte sich auf eine Kaskade aus maximal sieben Elementarleitungen. Der Signalflußgraph der siebenstufigen Kaskade wird aus vierzehn Knoten und sechsundzwanzig Zweigen, bzw. achtunddreißig Teilzweigen gebildet, in deren Zweiggewichte insgesamt acht verschiedene Parameter entsprechend den acht verschiedenen Reflexionsfaktoren eingehen; die Analysezeit für diesen Signalflußgraphen beträgt ca. fünf Minuten. Da das bestehende Programm bisher lediglich den Kernspeicher ausnutzt, ist eine Analyse komplexerer Signalflußgraphen noch nicht möglich; es ist geplant, den Speicherplatz durch Zugriff auf externe Datenspeicher zu erweitern.

9. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit geht von einem Netzwerkmodell aus unverkoppelten idealen TEM-Leitungen kommensurabler elektrischer Länge und reellen Widerständen aus (Kapitel 2). Es wird gezeigt, daß sich Netzwerke dieser Art durch die Zustandsgleichungen linearer diskreter Systeme beschreiben lassen; die Herleitung stützt sich dabei auf die Signalflußgraphendarstellung der wellenmäßigen Vorgänge (Kapitel 3).

Durch das behandelte Grundmodell lassen sich bereits eine große Anzahl technisch interessanter Leitungsnetzwerke kennzeichnen, z.B. $\lambda/4$ -Leitungsnetzwerke in der Hochfrequenztechnik oder bestimmte Leitungsschaltungen in der Impulstechnik. Als Anwendungsbeispiele werden in Kapitel 4 neben einfachen Schaltungen zur Impulsanpassung insbesondere neuartige Schaltungen zur Impulsverkürzung vorgestellt, die eine stärkere Verkürzung als die bisher bekannten Schaltungen erlauben.

In Kapitel 5 wird gezeigt, wie sich das Grundmodell durch Einfügung weiterer Netzwerkelemente erweitern läßt. Die Betrachtung bezieht sich auf Mehrfachleitungen, Induktivitäten und Kapazitäten, sowie auf eine günstigere Berücksichtigung homogener Leitungsstücke.

Zur Untersuchung des Zeitverhaltens mit dem Digitalrechner wird in Kapitel 6 nach einem kurzen Abriß wichtiger Prinzipien bisheriger Verfahren ein Analyseprogramm entwickelt, dessen Kern aus den Zustandsgleichungen hergeleitet ist. Für das verwendete Verfahren ist eine Matrix aufzustellen, in die die Streukoeffizienten der Stoßstellen des Netzwerks eingehen; der Aufbau dieser verallgemeinerten Streumatrix geschieht automatisch auf Grund der eingelesenen Topologie. Das Analyseprogramm wird zur Untersuchung des Einschwingverhaltens einiger Leitungsnetzwerke eingesetzt. Dabei wird unter anderen eine Schaltung mit reaktiven Elementen behandelt.

Mit einer bisher nicht bekannten Simulation der Leitungsnetzwerke auf dem Analogrechner beschäftigt sich Kapitel 7. Zur Darstellung der Leitungsnetzwerke sind neben der Realisierung der Zeitverzögerung Koppelpläne aufzustellen, die die Streueigenschaften der Stoßstellen nachbilden. Außer den exemplarisch angegebenen Koppelplänen für eine Reihe verschiedener Stoßstellen des Grundmodells wird zur Erläuterung des verwendeten Prinzips auch eine Stoßstelle behandelt, bei der eine Mehrfachleitung beteiligt ist. Die vorgenommene Realisierung der Zeitverzögerung durch Abtasthalteglieder läßt als Eingangsgrößen zunächst nur Treppenfunktionen zu. Es wird gezeigt, wie sich durch Zusatzsysteme auch kontinuierliche Zeitverläufe darstellen lassen. Einige Beispiele veranschaulichen die entwickelten Verfahren.

Zum Abschluß der Arbeit wird eine Methode zur automatischen Analyse von Signalflußgraphen beschrieben und ihre Anwendung auf Leitungsnetzwerke zur Bestimmung der Übertragungsfunktion dargelegt (Kapitel 8).

Literaturverzeichnis

- (1/1) Fettweis, A.: "Realisierung von Digitalfiltern in Anlehnung an klassische Filterstrukturen", Elektrotechn. Kolloquium d. Techn. Fak. d. Univ. Erlangen-Nürnberg am 4.6.1970
- (2/1) Butterweck, H.J.: "Die Ersatzwellenquelle", AEÜ 14 (1960), S. 367-372
- (2/2) Klein, W.: "Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen", Akademie-Verlag, Berlin 1961
- (2/3) Brand, H.: "Wellengrößen und Wellenmatrizen insbesondere für Mikrowellennetzwerke mit Vieltyp-Wellenleitern", AEÜ 15 (1961), S. 48-60
- (2/4) Oswald, J.: "Sur la répartition de l'énergie dans les reseaux linéaires", Cable et Transmission 12 (1958), S. 303-324
- (2/5) Schuon, E. und Wolf H.: "Die Darstellung von Mehrpolen durch die Streumatrix, Teil I und Teil II", NTZ 12 (1959), S. 361-366, S. 408-415
- (2/6) Collin, R.E.: "Foundations for microwave engineering", Mc Graw-Hill, New York 1966
- (3/1) Mason, S.J.: "Feedback theory - Some properties of signal flow graphs", Proc. IRE 41 (1953), S.1144-1156
- (3/2) Mason, S.J.: "Feedback theory - Further properties of signal flow graphs", Proc. IRE 44 (1956), S. 920-926
- (3/3) Mason, S.J. und Zimmermann, H.J.: "Electronic circuits, signals, and systems", J. Wiley & Sons, New York 1965
- (3/4) Hunton, J.K.: "Signal flow graphs simplify microwave measurements", Electronic Design 8 (1960), S. 222-229
- (3/5) Hunton, J.K.: "Analysis of microwave measurement techniques by means of signal flow graphs", IRE Trans. on MTT - 8 (1960), S. 206-212
- (3/6) Dunn, S.B. und Ross, G.F.: "Signal flow and scattering techniques in microwave network analysis", Sperry Engineering Revue 12 (1959), S. 10-22

- (3/7) Ross, G.F.: "The transient analysis of certain TEM mode four-port networks", IEEE Trans. on MTT-14 (1966), S. 528-542
- (3/8) Brown, F.M.: "Flow graphs and tapered transmission lines", Proc. IRE 49 (1961), S. 1696
- (3/9) Fiebig, A.: "Lineare Signalflußdiagramme", AEU 15 (1961), S. 285-295
- (3/10) DeRusso, P.M., Roy, R.J., Close, C.M.: "State variables for engineers", J. Wiley & Sons, New York 1965
- (3/11) Dorf, R.C.: "Time-domain analysis and design of control systems", Addison-Wesley, Reading Mass. 1965
- (3/12) Lewis, P.M.: "Synthesis of sampled-signal networks", IRE Trans. on CT - 5 (1958), S. 74-77
- (4/1) Zinke, O. und Brunswig, H.: "Lehrbuch der Hochfrequenz-technik", Springer, Berlin 1965
- (4/2) Richards, P.J.: "Resistor transmission-line circuits", Proc. IRE 37 (1948), S. 217-219
- (4/3) Ozaki, H. und Ishii, J.: "Synthesis of transmission line networks and design of vhf filters", IRE Trans. on CT - 2 (1955), S. 325-336
- (4/4) Collin, R.B.: "Theory and design of wide band multisection quarter-wave transformers", Proc. IRE 43 (1955), S. 179-185
- (4/5) Ikeno, J.: "Principles of designing distributed networks", Report PIBMRI-1003-02, Polytechnic Institute of Brooklyn, Microwave Research Institute 1962
- (4/6) Riblet, H.: "General synthesis of quarter-wave impedance transformers", IRE Trans. on MTT-5 (1957), S. 36-43
- (4/7) Grayzel, A.I.: "A synthesis procedure for transmission-line networks", IRE Trans. on CT - 5 (1958), S. 172-181
- (4/8) Wenzel, R.J.: "Exact design of TEM microwave networks using quarter-wave lines", IEEE Trans. on MTT - 12 (1964), S. 94-111
- (4/9) Levy, R.: "A general equivalent circuit transformation for distributed networks", IEEE Trans. on CT -12 (1965), S. 457-458

- (4/10) Horton, M.C. und Wenzel, R.J.: "Realization of microwave filters with equal ripple response in both pass and stop bands", Proc. of the Symp. on General. Networks, Polytechn. Inst. of Brooklyn 1966, S. 257-288
- (4/11) Carlin, H.J.: "Méthodes modernes des synthèse des réseaux de ligne de transmission", L'onde électrique XLVII (1967), S. 8-42
- (4/12) Fraiture, L. und Neiryneck, J.: "Theory of unit-elements filters", MBLE Report R 62, Brüssel 1967
- (4/13) Young, L.: "Microwave filters - 1965", IEEE - Trans. on MTT - 13 (1965), S. 489-508
- (4/14) Young, L.: "Reflections on microwave filters and couplers", The Microwave Journal 11 (1968), S. 54-63
- (4/15) Matthaei, G.L., Young, L., Jones, E.M.T.: "Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures", McGraw Hill, New York etc. 1964
- (4/16) Ross, G.F.: "The synthetic generation of phase-coherent microwave signals for transient behavior measurements", IEEE Trans. on MTT-13 (1965), S. 704-706
- (4/17) Yao, F.C.: "Analysis of signal transmission in ultra high speed transistorized digital computers" IEEE Trans. on EC - 12 (1963), S. 372-382
- (4/18) Jarvis, D.B.: "The effects of interconnections on high-speed logic circuits", IEEE Trans. on EC - 12 (1963), S. 476-487
- (4/19) Feller, A., Kaupp, H.R. und Digiacomo, J.J.: "Cross-talk and reflections in high-speed digital systems", Proc. of the Fall Joint Computer Conference 27 (1965), S. 512-525
- (4/20) Richardson, A.: "Noise considerations in micro-electronic digital computers", Electrical Commun. 41 (1966), S. 467-475
- (4/21) Grimmer, R.C.: "Interconnecting high-speed integrated circuits with multilayer boards", Computer Design 6 (1967), S. 36-45

- (4/22) Wassel, G.N.: "Multiple reflection on pulse signal transmission line - model for computer solution", IEEE Trans. on EC - 16 (1967), S. 193-202
- (4/23) Seitzer, D.: "Verformung von Impulsen auf inhomogenen Leitungen", Dissertation TH Stuttgart 1961
- (4/24) Seitzer, D.: "Die Formänderung von steilen Impulsen durch eine Ecke in einer Leitung", AEÜ 15 (1961) S. 303-307
- (4/25) Seitzer, D.: "Die Exponentialleitung zwischen ohmschen Widerständen als Anpassungsübertrager für steile kurze Impulse", AEÜ 15 (1961), S. 296-301
- (4/26) Seitzer, D.: "Formänderungen von steilen Impulsen durch Mehrfachreflexionen entlang einer Leitung", AEÜ 16 (1962), S. 263-270
- (4/27) Hoffmann, K.: "Ein Leitungsbauelement als Impulsübertrager mit Impulsverkürzung und Phasenumkehr" AEÜ 19 (1965), S. 277-280
- (4/28) Helm, G.: "Der Richtkoppler als Impulsübertrager", AEÜ 20 (1966), S. 461-465
- (4/29) Nonnenmacher, W.: Persönliche Mitteilung an Prof. Schüßler
- (4/30) Powell, M.J.D.: "An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives", Computer Journ. 7 (1964), S. 155-162
- (5/1) Klein, W.: "Der klemmenzahlsymmetrische Mehrpol", AEÜ 12 (1958), S. 533-539
- (5/2) Wagner, K.W.: "Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen", Elektrotechn. Zeitschr. 35 (1914), S. 639-643, S. 677-680, S. 705-708
- (5/3) Klein, W.: "Die Theorie des Nebensprechens auf Leitungen", Springer, Berlin 1955
- (5/4) Amemiya, H.: "Matched-termination network for multiple parallel transmission lines", Electronics Letters 3 (1967), S. 13-14
- (5/5) Amemiya, H.: "Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines", RCA-Review XXVIII (1967), S. 241-276

- (5/6) Amemiya, H.: "Time-domain analysis of multiple parallel transmission lines by means of equivalent circuits", Electronics Letters 3 (1967), S.14-15
- (5/7) Koizumi, S.: "Mehrpoleleitungstheorie", Archiv für Elektrotechnik 33 (1939), S. 171-188
- (5/8) Oehrl, W., Seeger, G. und Stäblein, H.G.: "Allgemeine Betrachtungen zur Theorie der Mehrfachleitungen", AEÜ 12 (1958), S. 245-250
- (5/9) Zurmühl, R.: "Matrizen", Springer, Berlin 1964
- (6/1) Bewley, L.V.: "Traveling waves on transmission systems", Wiley & Sons, New York 1933
- (6/2) Metzger, G. und Vabre J.P.: "Electronique des impulsions" Bd. 2, Masson & Cie, Paris 1966
- (6/3) Hilberg, W.: "Möglichkeiten und Grenzen einer elementaren Theorie der Überkopplung von Impulsen und Sinuswellen zwischen parallelen Leitungen", NTZ-Report Nr. 4, VDE-Verlag, Berlin 1969
- (6/4) Schnyder, O.: "Druckstösse in Pumpensteigleitungen", Schweiz. Bauztg. 94 (1929), Nr. 22 und 23
- (6/5) Bergeron, L.: "Du coup de béliier en hydraulique au coup de foudre en électricité", Dunod, Paris 1950
- (6/6) Arlett, P. und Murray-Shelley, R.: "The teaching of travelling wave techniques using an improved graphical method", Internat. J. Elect. Engng. Educ. 4 (1966), S. 213-230
- (6/7) O'Kelley, D.: "Graphical solution of travelling wave problems", Internat. J. Elect. Engng. Educ. 5 (1967), S. 389-94
- (6/8) Frey, W. und Althammer, P.: "Die Berechnung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge auf Leitungen mit Hilfe eines Digitalrechners", Brown Boveri Mitteilungen 48 (1961), S. 344-355
- (6/9) Arlett, P. und Murray-Shelley, R.: "An improved method for the calculation of transients on transmission lines using a digital computer", Proc. P.I.C.A. Conference 4 (1965), S. 195-211

- (6/10) Schwarz, E.: "Einschaltvorgänge auf verlustlosen, mit ohmschen Widerständen abgeschlossenen Leitungen", AEÜ 16 (1962), S. 627-632
- (6/11) Getsinger, W.J.: "Analysis of certain transmission-line networks in the time-domain", IRE Trans. on MTT - 8 (1960), S. 301-309
- (6/12) Kaden, H.: "Der Einfluß von Leitungen auf die Schaltvorgänge an Widerständen, Spulen und Kondensatoren", AEÜ 21 (1967), S. 518-527
- (6/13) Reed, J. und Wheeler, G.J.: "A method of analysis of symmetrical four-port networks", IRE Trans. on MTT - 4 (1956), S. 246-252
- (6/14) Reed, J.: "The multiple branch waveguide coupler", IRE Trans. on MTT - 6 (1958), S. 398-403
- (7/1) Robichaud, L.P.A., Boisvert, M. und Robert, J.: "Signal flow graph and its applications", Prentice Hall, London 1962
- (7/2) Korn, G. und Korn, T.: "Electronic analog and hybrid computers", Mc Graw Hill, New York 1964
- (7/3) Kuntz, W.: "Entwurf und Anwendung eines Abtast-Analogrechners", Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 2 hrsg. von W. Schüßler, Univ. Erlangen-Nürnberg 1966
- (7/4) Kuntz, W.: "Entwurf und Anwendung eines Abtast-Analogrechners", NTZ 21 (1968), S. 82-87
- (7/5) Schneider, G.: "Über die Nachbildung und Untersuchung von Abtastsystemen auf einem elektrischen Analogrechner", Elektron. Rechenanl. 2 (1960), S. 31-37
- (7/6) Kley, A. und Meyer-Brötz, G.: "Analoge Rechenelemente als Abtaster, Speicher und Laufzeitglieder", Elektron. Rechenanl. 3(1961), S. 119-122
- (7/8) Beschreibung und Bedienungsanleitung des Hybriden Präzisionsanalogrechners RA 770, AEG-Telefunken, Konstanz 1967
- (7/9) Galpin, R.K.P.: "Variable electronic allpass delay network", Electronics Letters 4 (1968), S. 137-139

- (7/10) Thomas, C.H.: "Transport time-delay simulation for transmission line representation", IEEE Trans. on C - 17 (1968), S. 205-214
- (7/11) Van Dommelen, I.D.: "Hybrid computer study of the energization of a d.c. link", Rev. El. (Belg.) 5 (1966), S. 101-111
- (7/12) Kaiser, J.F.: "Digital filters", Kapitel 7 in "System analysis by digital computers", Kaiser, J.F. und Kuo, F.F., J. Wiley & Sons, New York 1966
- (7/13) Kuntz, W., Schüßler, W., Winkelkemper, W.: "Untersuchungen über Eigenschaften, Entwurf und Realisierung digitaler Filter", Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 10, hrsg. von W. Schüßler, Univ. Erlangen-Nürnberg 1969
- (7/14) Schüßler, W.: "Über die Darstellung von Übertragungsfunktionen und Netzwerken am Analogrechner", Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 1009, Westdeutscher Verlag, Köln und Oppladen 1961
- (7/15) Schüßler, W.: "Der Echoentzerrer als Modell eines Übertragungskanal", NTZ 16 (1963), S. 155-163
- (7/16) Gerst, I. und Diamond, J.: "The elimination of intersymbol interference by input signal shaping", Proc. IRE 49 (1961), S. 1195-1203
- (7/17) Jess, J.: "Die Rekonstruktion abgetasteter Signale durch lineare Filter", Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 8, hrsg. von W. Schüßler, Univ. Erlangen-Nürnberg 1967
- (8/1) Hohn, F.F., Seshu, S. und Aufenkamp, D.D.: "The theory of nets", IRE Trans. on EC - 6 (1957), S. 154-161
- (8/2) Till, R.: "Zur automatischen Analyse linearer Signalflußgraphen", AEÜ 22 (1968), S. 219-224
- (8/3) Gill, A.: "Analysis of nets by numerical methods", J. Assoc. Comput. Mach. 7 (1960), S. 251-259
- (8/4) Souriau, J.M.: "Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices", Comptes rendus 227 (1948), S. 1010-1011

- (8/5) Frame, J.S.: "A simple recursion formula for inverting a matrix", Bull. Am. Math. Soc. 55 (1949), S. 1045
- (8/6) Faddejew, D.K. und Faddejewa, W.N.: "Numerische Methoden der linearen Algebra", Oldenbourg, München u. Wien 1964
- (8/7) Fettis, H.E.: "A method for obtaining the characteristic equation of a matrix and computing the associated modal columns", Quart. Appl. Math. 8 (1950), S. 206-212
- (8/8) Pottle, C.: "State-space technique for general active network analysis", Kapitel 3 in "System analysis by digital computers", Kaiser, J.F. und Kuo, F.F., J. Wiley & Sons, New York 1966
- (8/9) Edelmann, H.: "Bemerkungen über die Codierung der Wang-Algebra zur Analyse elektrischer Netze", AEU 21 (1967), S. 622-624
- (8/10) Roska, T.: "Generating network functions in literal form by digital computers", Summer School on Circuit Theory, Prag 1968

Lebenslauf

Am 22. Oktober 1938 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Ludwig Kittel und seiner Ehefrau Meta, geb. Schwarz, in Camburg/Saale geboren. Nach der Flucht aus der Sowjetzone im Jahr 1947 besuchte ich zunächst in Kleinförste bei Hildesheim weiterhin die Volksschule und anschließend in Hildesheim den mathematisch naturwissenschaftlichen Zweig der Scharnhorstschule; ich verließ dieses Gymnasium nach bestandener Reifeprüfung im Februar 1959.

Mit dem Wintersemester 1959/60 habe ich an der Technischen Hochschule in Hannover mit dem Studium der Elektrotechnik begonnen. Ich legte im Herbst 1962 in Hannover die Diplom-Vorprüfung ab und wechselte dann zur Technischen Hochschule in Karlsruhe über, wo ich bis zur bestandenen Diplom-Hauptprüfung im Herbst 1966 Elektrotechnik in der Vertiefungsfachgruppe Nachrichtentechnik studierte.

Meinem Studium ging ein halbjähriges Vorpraktikum bei der Firma Senking in Hildesheim voraus. Es wurde ergänzt durch ein viermonatiges Fachpraktikum bei den Firmen Blaupunkt in Hildesheim und Nass in Hannover sowie durch eine mehrjährige Tätigkeit als Hilfsassistent an den Instituten für Elektrobiologie und Nachrichtensysteme in Karlsruhe.

Seit dem 21. November 1966 arbeite ich am Institut für Nachrichtentechnik der Universität Erlangen-Nürnberg; am 16. Oktober 1967 bin ich zum wissenschaftlichen Assistenten ernannt worden.

Ludwig Kittel

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
